確率モデルによる流砂現象の一考察

神戸大学工学部　正員　松梨順三郎
日本国有鉄道　正員　○坂田　英洋

1．はじめに　流砂現象は，水と砂面との境界付近において生ずる極めてめまぐるしく複雑な現象であり，どうしてもモデル的に扱わざるをえない。そこで，本研究では，Sakhan(1)の考え方と同様に，マルコフ過程を用いた確率モデルによりこの流砂現象の表現を試みる。そして，このモデルにより掃流砂量を算定し，このモデルを検討する。

2．流砂現象の確率モデル　今，砂粒子は，ある時刻において浮遊Ⓐ，掃流Ⓑ，静止Ⓒの3つの状態のうちどれか一つの状態にあるものと仮定し，更に，この場合の状態の遷移はマルコフ過程の特性に従うものとする。遷移確率$P_{ij}(t_0,t)$（時刻t_0にiの状態にあった砂粒子が時刻tにjの状態に遷移する確率，$i=A,B,C$，$j=A,B,C$）を導入すると，次のようなKolmogorovの微分方程式が成立する。

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{P}(t_0,t)=\vec{P}(t_0,t)\vec{\Psi}(t) \qquad （初期条件として\ \vec{P}(t_0,t_0)=\vec{I}） \quad \text{-------} (1)$$

ここで，$\vec{I}$は単位行列，$\vec{P}(t_0,t)$，$\vec{\Psi}(t)$は次のような行列である。

$$\vec{P}(t_0,t)=\begin{pmatrix} P_{AA}(t_0,t) & P_{AB}(t_0,t) & P_{AC}(t_0,t) \\ P_{BA}(t_0,t) & P_{BB}(t_0,t) & P_{BC}(t_0,t) \\ P_{CA}(t_0,t) & P_{CB}(t_0,t) & P_{CC}(t_0,t) \end{pmatrix} \text{-----} (2) \qquad \vec{\Psi}(t)=\begin{pmatrix} \psi_{AA}(t) & \psi_{AB}(t) & \psi_{AC}(t) \\ \psi_{BA}(t) & \psi_{BB}(t) & \psi_{BC}(t) \\ \psi_{CA}(t) & \psi_{CB}(t) & \psi_{CC}(t) \end{pmatrix} \text{------} (3)$$

$\vec{\Psi}(t)$は遷移強度行列と呼ばれるものであり，流砂現象においては，砂輸送の強さを表わすものである。そして，この遷移強度行列$\vec{\Psi}(t)$は次のような性質を持つ。『対角成分は常に負，非対角成分は常に正であり，また各行の和はゼロである。』従って，非対角成分が決定されると，対角成分はおのずから決まる。

3．遷移強度行列$\vec{\Psi}(t)$の決定　$\vec{\Psi}(t)$は，砂輸送の強さを表わすものであるから水理学的な量の関数と考えられる。今，砂粒子は，U_{for}（前進速度），V_{rise}（上昇速度），V_{fall}（下降速度）のうちどれか一つの速度で移動するものとし，更に最も密な状態で移動するものと考える。砂粒子の粒径をdとすると，U_{for}/d，V_{rise}/d，V_{fall}/dは単位時間当りにそれぞれの状態へ移動する砂粒子の数を表わしているので，これらを$\vec{\Psi}(t)$の要素として考えることができる。即ち，$\vec{\Psi}(t)$は次のように表わすことができる。

$$\vec{\Psi}(t)=\begin{pmatrix} -\left(V_{fall}/d+V_{fall}/d\right) & V_{fall}/d & V_{fall}/d \\ V_{rise}/d & -\left(V_{rise}/d+V_{fall}/d\right) & V_{fall}/d \\ V_{rise}/d & U_{for}/d & -\left(V_{rise}/d+U_{for}/d\right) \end{pmatrix} \text{-------------------} (4)$$

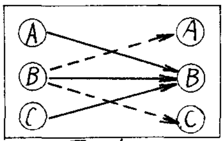
4．U_{for}，V_{rise}，V_{fall}の決定　U_{for}，V_{rise}，V_{fall}の算定については，平坦な砂面上にある球状の砂粒子に対して成立するNewtonの運動方程式より得られる次式を用いることにする。(1)

$$\pm U_{for}^2=\frac{d}{m}(F_x) \text{-------------} (5) \qquad \pm V^2=\frac{d}{m}(F_y) \text{-------------} (6)$$

ここで，VはV_{rise}，V_{fall}に対応し，F_x，F_yはそれぞれの方向において砂粒子に働く力である。砂粒子に働く力F_x，F_yの算定は，岩垣(2)が限界掃流力の理論を展開する中で用いた方法を応用することにする。

5　掃流砂量の算定　式(1)のKolmogorovの微分方程式を解くと9つの定常な遷移確率が得ら

れるが，この遷移確率や遷移強度を用いて，ある場所ある時刻における掃流砂量$q_B(x,t)$を算定する式としては，次式が考えられる。(図−1)



図−1

$$
\begin{aligned}
q_B(x,t) = d\{ & C_A(x-\Delta x,t-\Delta t)\lambda_{AB}(x-\Delta x,t-\tfrac{1}{2}\Delta t)P_{AB}(x-\Delta x,t-\tfrac{1}{2}\Delta t) \\
& + C_B(x-\Delta x,t-\Delta t)\lambda_{BB}(x-\Delta x,t-\tfrac{1}{2}\Delta t)P_{BB}(x-\Delta x,t-\tfrac{1}{2}\Delta t) \\
& + C_C(x-\Delta x,t-\Delta t)\lambda_{CB}(x-\Delta x,t-\tfrac{1}{2}\Delta t)P_{CB}(x-\Delta x,t-\tfrac{1}{2}\Delta t) \\
& - C_B(x-\Delta x,t-\Delta t)\lambda_{BA}(x-\Delta x,t-\tfrac{1}{2}\Delta t)P_{BA}(x-\Delta x,t-\tfrac{1}{2}\Delta t) \\
& - C_B(x-\Delta x,t-\Delta t)\lambda_{BC}(x-\Delta x,t-\tfrac{1}{2}\Delta t)P_{BC}(x-\Delta x,t-\tfrac{1}{2}\Delta t)\} \quad \cdots(7)
\end{aligned}
$$

ここで，q_Bは単位幅の流砂量であり，C_Aは浮遊砂の濃度，C_Bは掃流砂の濃度，C_Cは河床に静止している砂の濃度である。そして，C_Bは，q_Bと同様に次式で算定されるものとする。

$$
\begin{aligned}
C_B(x,t) = & C_A(x-\Delta x,t-\Delta t)P_{AB}(x-\Delta x,t-\tfrac{1}{2}\Delta t) + C_B(x-\Delta x,t-\Delta t)P_{BB}(x-\Delta x,t-\tfrac{1}{2}\Delta t) + C_C(x-\Delta x,t-\Delta t)P_{CB}(x-\Delta x,t-\tfrac{1}{2}\Delta t) \\
& - C_B(x-\Delta x,t-\Delta t)P_{BA}(x-\Delta x,t-\tfrac{1}{2}\Delta t) - C_B(x-\Delta x,t-\Delta t)P_{BC}(x-\Delta x,t-\tfrac{1}{2}\Delta t) \quad \cdots(8)
\end{aligned}
$$

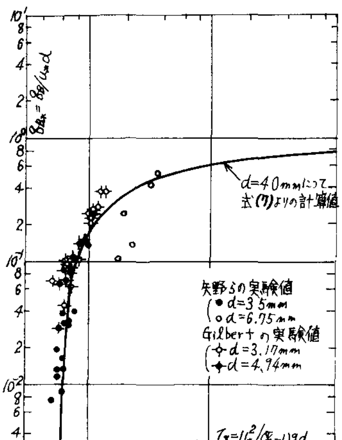
6．計算結果と考察　この確率モデルを検討するために，式(7)(8)に対して等流状態を仮定し，その場合の掃流砂量の計算を行う。$C_A=0$とし，C_Bは式(8)より逆算し，C_Cは砂層のうち第一層だけが移動するものと仮定してその濃度を用いる。Kalinskeは河床面にある砂粒子の数をP/d^2で表わし，$P=0.35$としているので，これを用いると$C_C \fallingdotseq 0.233d$となる。砂粒子に働く流体力のうち揚力についてはその扱い方に問題があるので，ここでは省略する。図-2は，$d=4.0$mmについて式(7)を用いて計算したものを，Gilbertや矢野ら(3)の実験値と比較したものである。Gilbertの実験値は比較的粒径の大きい平坦河床のデータを採用した。また，図-3は，各種流砂量公式と比較したものである。これらの図より，限界掃流力付近では，計算値と各データとの一致が見られる。これは，砂粒子に働く流体力の算定において，岩垣の限界掃流力の理論を応用したからであろう。図−4は，遷移確率P_{CA}, P_{CB}, P_{CC}の掃流力による変化を示したものである。

7．結語　本研究において展開した確率モデルにより，限界掃流力付近では流砂量が定量的に把握されており，ある程度の成功を見た。今後，大きな掃流力の場合についての検討が必要であり，合わせて，マルコフ過程の適合性についても実験等による検討が必要である。

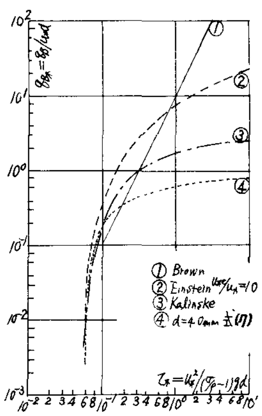
(1) Sakhan, K.S. : Simulation of the dynamics of erodible bed, A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Civil Engineering, Utah State University, Logan, Utah, 1972

(2) 岩垣雄一：雨水流による地面浸食機構に関する基礎的研究，1955

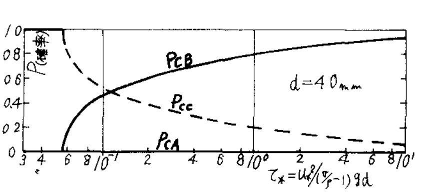
(3) 矢野勝正・土屋義人・道上正規：砂れきの流送機構の確率過程としての特性について，京大防災研究所年報第13号B　昭和45年



図−2



図−3



図−4