差分・線形計画法 (Finite Difference & Linear Programming Method) による流体解析

京都大学 学生員 ○二神 種弘

1. はじめに

差分法と線形計画法を結合させて，制約条件式と目的関数を有する微分方程式系の1つの解法「差分・線形計画法 (Finite Difference & Linear Programming Method, or, the F.D. & L.P. Method)」を考案した[1]。そのような微分方程式系は工学および理学のいろいろな分野における制御問題や最適設計を考える時，しばしば出てくると思われ，特に環境問題において興味あるものと思われる。本手法を具体的に示すために，主として拡散現象に支配される水系水質制御問題への応用を試みた。

本手法考案にあたり，Bellman の動的計画法や Pontryagin の最大原理と同じような決定変数と状態変数の概念を取り入れた。

本手法は先に考案した有限要素・線形計画法[1),2)] (Finite Element & Linear Programming Method, or, the F.E. & L.P. Method) に比較してその有用性は劣るが，解析対象が均質な矩形である場合にはそれなりの価値を持つものと思われる。

2. 基礎微分方程式系

水質規制，負荷放出点での制約および目的関数を有する拡散現象の基礎式は

つりあい状態式
$$\underbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{2,3}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} D_{xk} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - v_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right) - K\phi}}_{\phi\text{-terms}} + \underbrace{\boxed{Q^c}}_{Q^c\text{-term}} + \underbrace{\boxed{Q^u}}_{\text{const.}} = 0 \qquad (1)$$

制約条件式
$$\phi \leqq \overline{\Phi} \qquad (2)$$
$$Q^c \leqq \overline{Q^c} \qquad (3)$$
$$\phi \geqq 0, \quad Q^c \geqq 0 \qquad (4)$$

目的関数
$$Z = \underset{Q^c}{\mathrm{Opt.}}\ f\,(Q^c, \phi) = \mathrm{Max.}\ \Sigma\, Q^c \qquad (5)$$

ここで

Q^c : 決定変数，制御可能負荷（多孔ディフューザーから放出される熱負荷量やプラントから放出される汚濁物質負荷量など）。

ϕ : 状態変数，水系水質（温度や濃度）。

Z : 目的関数，一般には，Q^c と ϕ の関数であり，その設定の仕方は問題によりいろいろであるが，ここでは制御負荷の最大化を考えてみる。

$\overline{Q^c}$: 決定変数上限（放流点での制約）。

$\overline{\Phi}$: 状態変数上限（水質規制値など）。

D_{xk} : x_k 方向の拡散係数。

v_k : 流速 (v_x, v_y or v_z)。

K : 減衰要素（水面での熱交換係数や汚濁物自浄係数など）。

Q^u : 制御不可能負荷（不可避的あるいは自然発生の source or sink など）。

x_k : 座標 (x, y or z)。

上記目的関数は，水系の受け入れ可能負荷の上限を与えることになる。

3．差分・線形計画法の定式化

先の基礎偏微分方程式系を差分法（中心差分による）を用いて離散化すると，2次元の場合，以下の代数方程式を得ることができ，一種の線形計画法（差分線形計画法）を得る。

つりあい状態式（N個）

$$\begin{bmatrix} A \\ (N\times N) \end{bmatrix} \{\phi_n\} + \begin{bmatrix} T \\ (N\times I) \end{bmatrix} \{{}_jQ_i^c\} = \{Q_n^u\} \quad (6)$$

制約条件式（L+I個）

$$\begin{bmatrix} G_\phi \\ (L\times N) \end{bmatrix} \{\phi_n\} \leqq \{{}_m\bar{\Phi}_\ell\} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} G_\theta \\ (I\times I) \end{bmatrix} \{{}_jQ_i^c\} \leqq \{{}_j\bar{Q}_i^c\} \quad (8)$$

$$\phi_n \geqq 0, \quad {}_jQ_i^c \geqq 0 \quad (9)$$

目的関数

$$Z = \underset{{}_jQ_i^c}{\mathrm{Opt.}}\ f({}_jQ_i^c, \phi_n) = \mathrm{Max.} \sum_{i=1}^{I} {}_jQ_i^c \quad (10)$$

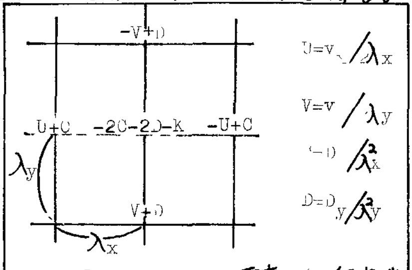


Fig. 1 [illegible] の要素（一般点で）

ここで

A　：式1のϕ-vector を差分化してえられた Matrix（Fig.1 参照）。

T　：制御可能負荷に関係する Matrix。

G_ϕ　：状態変数に関係する制約 Matrix。

G_θ　：決定変数に関係する制約 Matrix。

${}_jQ_i^c$　：制御変数，制御可能負荷放出格子点 j の制御可能負荷，i は変数番号。

ϕ_n　：状態変数，各格子点における水質。

Z　：目的関数，制御可能負荷の総和。

${}_j\bar{Q}_i^c$　：決定変数上限。

${}_m\bar{\Phi}_\ell$　：状態変数上限，水質規制点 m での規制値，ℓ は規制番号。

Q_n^u　：各格子点の制御不可能負荷発生量。

i = 1〜I（I：決定変数の数，制御可能負荷放出点数）。

n = 1〜N（N：状態変数の数，格子数。

ℓ = 1〜L（L：水質規制点数）。

4．単純モデルによる Matrix-Vector 表示

差分・線形計画法の具体例を Fig. 2 および式11〜13に示す。

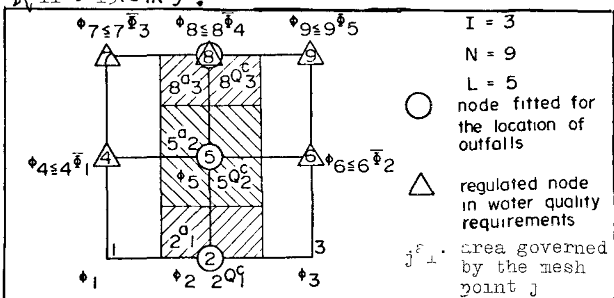
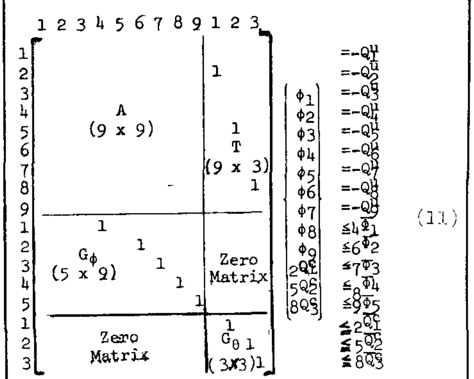


Fig.2 Example of Finite Difference & Linear Programming Method



$$\phi_n \geqq 0\ (n = 1\sim 9),\ {}_jQ_i^c \geqq 0\ (i = 1\sim 3) \quad (12)$$

$$Z = \mathrm{Max.} \sum_{i=1}^{3} {}_ja_i\, {}_jQ_i^c \quad (13)$$

5．あとがき

計算例は一部すでに発表ずみ[1]であるが，講演時にいろいろな計算例を発表する予定である。

本研究は東大大型計算センターとそのプログラムライブラリー「HI/TC/LP02」を利用しておこなった。

参考文献

1) 二神種弘，“有限要素線形計画法の考察および水系水質制御問題への応用”，19回水理講演会，1974年2月

2) Futagami, T., "Finite Element & Linear Programming, [illegible] Water Pollution Control" [illegible] Congress, São Paulo, July–August [illegible] preparation)