

有限要素法による潮流解析に関する一考察

大阪大学工学部 正員 榎本 亨
大阪大学工学部 正員 O中込 啓二

1 まえがき

近年、防護堤の伸張ならびに埋立造成などによる地形形状変化に伴う沿岸環境変化の予測が海岸工学上の検討事項の一つとなりつつある。このような潮流変動の予測手法として差分近似に基づく数多くの数値実験が行なわれているが、いずれも湾に相当する広大な水面を対象としているため計算精度は粗く境界形状を正確に考慮した例は少ない。しかも、差分間隔は安定性の拘束から極端に小さく選ぶを得ず、数サイクルに亘る局所的な流動を推算するには計算機容量・演算時間から非常に難しい。

そこで本報においては、複雑な地形形状を明確に考慮するために格子網を任意形状に選択し得る有限要素法・潮流解析への適用を試みに、採用した手法は未知物理量を線型結合の関数近似で表わし、境界条件を含めた基礎微分方程式に代入した場合の残差が解析領域で最小となるように係数を決定する重み付き残差法(WRM)であり、変分原理に基づく有限要素法とは若干異なるが、類似の定式化・行列演算が行なうことができる。

2 基礎方程式

潮流の基礎式は鉛直方向に速度成分を平均化することにより次式のようになる。

$$\partial \zeta / \partial t + \omega \{ (h + \zeta) \nabla^2 \zeta \} / \partial x_i = 0 \quad (1)$$

$$\partial \nabla^2 \zeta / \partial t + \nabla \zeta \cdot \partial \nabla^2 \zeta / \partial x_i = g \cdot \partial \zeta / \partial x_i + f \sqrt{\nabla^2 \zeta^2} / (h + \zeta) \cdot \nabla^2 \zeta - A_e \nabla^2 \nabla^2 \zeta \quad (2)$$

ここに、 $\nabla^2 \zeta$: 速度成分、 h : 水深、 ζ : 水位、 f : 摩擦係数、 A_e : 水平渦粘性係数である。

また、境界条件は固定境界 S_1 と自由境界 S_2 とからなり、境界での法線方向余弦を x, y 軸に対してそれぞれ l_x, l_y と選べし。

$$(i) \quad \nabla^2 \zeta = f(x, y, t), \quad \nabla \zeta = g(x, y, t), \quad \zeta = g(x, y, t) \quad \text{given at } S_1 \quad (3)$$

$$(ii) \quad \nabla^2 \zeta l_x + \nabla \zeta l_y = 0, \quad \partial \nabla^2 \zeta / \partial x \cdot l_x + \partial \nabla \zeta / \partial y \cdot l_y = 0 \quad \text{at } S_2 \quad (4)$$

3 有限要素法(WRM)による定式化

今、連綿体を図1に示すような有限要素体分割し、未知関数 $\zeta, \nabla^2 \zeta, \nabla \zeta$ を要素内では各節長値の線型結合で表わすならば、それらは時間と空間の形状関数 $N(t), \phi(x, y)$ を用いて積の形で次のように表わされる。

$$\zeta_a(x, y, t) = [N_e(t), N_b(t)] [\phi(x_i), \phi(x_j)]^T \cdot \{ f_i \} \quad (5)$$

この近似関数を基礎式(1),(2)に代入した場合に厳密に“0.”とならず残差 $R(\zeta_a, \nabla^2 \zeta_a, \nabla \zeta_a)$ が必ず生じる。

この残差 R に $N_e(t) \cdot \phi(x, y)$, $N_b(t) \cdot \phi(x, y)$ を重み関数として掛けて加重平均をとり、解析対象とする全要素で R の初値和が平均的に“0.”となるように未知節長値 $\zeta_i, \nabla^2 \zeta_i, \nabla \zeta_i$ を定めれば解析解に近い解が得られる。潮流解析は初期値境界値問題として解かれるので、時間軸においては $\zeta, \nabla^2 \zeta, \nabla \zeta$ は既知量であり基礎式(1),(2)は満たされている筈であるから

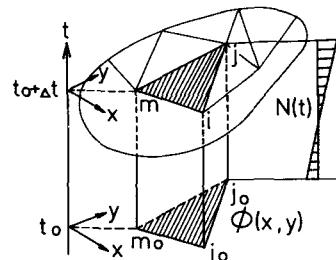


図1 有限要素体

時間 $t_0 + \Delta t$ に関する WRM を考えたい。すなわち各方程式に対して次式が成立つ。

$$\int_{\Omega} N(t) \{ \phi(x, y) \} \cdot R_R(\zeta_R, \Pi_R, \tau_R) d\Omega dt = 0, \quad R=1, 2, 3 \quad (6)$$

4. 非線形項の評価

非線形項は連続方程式を考慮して書き直すと

$$\Pi \cdot \partial \Pi / \partial x + V \cdot \partial \Pi / \partial y = -(\Pi/h) \cdot \partial \zeta / \partial t - (\Pi^2/h) \cdot \partial h / \partial x - (\Pi V/h) \cdot \partial h / \partial y - \Pi^2 \cdot \partial (\Pi/\zeta) / \partial y \quad (7)$$

となり、波高変化の大きい場合、流速が増大する場合、水深が急変する場合、また流向の変化する場合に非線形項は増大することになる。これらいずれも沿岸形状ならびに底部形状に依存し浅海領域では要素を十分に強にすることにより表現でき、非線形項を各有限要素で線形化して解くことの誤差は小さいと考える。

5 境界条件の配慮

境界条件を定式化の過程において考慮するために、式(6)に Gauss の発散定理あるいは部分積分を適用して面積分を面積分と線積分との和で表わす。

すなわち、連続方程式の第二項に部分積分を行なえば、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_t \phi_i \{ \partial(h+\zeta)\Pi / \partial x_i \} d\Omega dt \\ = \int_{\Omega} N_t \phi_i (h+\zeta) (\Pi l_x + \Pi l_y) ds dt \\ - \int_{\Omega} N_t (h+\zeta) \{ \partial \phi_i / \partial x \cdot \Pi + \partial \phi_i / \partial y \cdot V \} d\Omega dt \quad (8) \end{aligned}$$

となる。上式中線積分で表わされる境界項は境界面に直交する流量フラックスを示し、自然境界 S_2 では 0 となる。式(8)中の非線形項 $(h+\zeta)\Pi$ は 4 の考察より時間 t_0 における流速 Π_0 を用いて $(h\Pi + \zeta\Pi_0)$ のように線形化することができる。

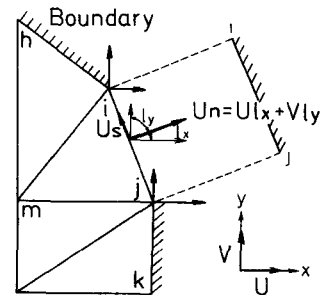


図2 境界条件

運動方程式の非線形項、粘性項に関してと同様の線積分への変換を行なうならば

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_t \phi_i \{ \Pi \cdot \partial \Pi / \partial x + V \cdot \partial \Pi / \partial y \} d\Omega dt \\ = \int_{\Omega} N_t \phi_i \Pi \{ \Pi l_x + \Pi l_y \} ds dt - \int_{\Omega} N_t \phi_i \Pi \{ \partial(\phi_i \Pi) / \partial x + \partial(\phi_i V) / \partial y \} d\Omega dt \quad (9) \\ \int_{\Omega} N_t \phi_i A_R \{ \partial \Pi / \partial x^2 + \partial \Pi / \partial y^2 \} d\Omega dt \\ = \int_{\Omega} N_t \phi_i A_R \{ \partial \Pi / \partial x \cdot l_x + \partial \Pi / \partial y \cdot l_y \} ds dt - \int_{\Omega} N_t \phi_i \{ \partial \phi_i / \partial x \cdot \partial \Pi / \partial x + \partial \phi_i / \partial y \cdot \partial \Pi / \partial y \} d\Omega dt \quad (10) \end{aligned}$$

となり、自然境界条件 S_2 は容易に考慮される。また、固定境界 S_1 に沿っては重み関数 $\phi_i(x, y) = 0$ となり、外部境界に沿っての境界項は消失すると考えてよい。

6. 係数行列の構成

4.5.を考慮して式(6)を書き直すと、各有限要素に対して最終的に次の行列式が得られる。

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Pi \\ \Pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \quad (11) \quad \begin{cases} A, B, C \text{ は } (3 \times 3) \text{ 行列で } \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega \text{ の関数} \\ C = [C_1, C_2, C_3]^T, \Pi = [\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3]^T, \dots \end{cases}$$

式(11)は各節長の未知関数 3×3 と同数の方程式群からなり解くことができる。全解析領域を考慮する場合には、有限要素を拡大して式(11)を連立させ全領域に対する係数行列を組立て、時間ステップ Δt で逐次計算を繰り返すことにより所要の解を得る。上記の計算適用例ならびに問題点に関しては講演時に詳述したい。