吊橋の固有振動解析法

大阪大学工学部　正　員　前田幸雄
大阪大学工学部　正　員　林　　正
大阪大学大学院　学生員　○　前田研一
大阪大学工学部　　　　　三浦健也

1. まえがき　撓度理論[1]による，塔の変形を考慮した変断面補剛桁を有する三径間対称吊橋固有振動解析における新たな簡易計算法を　前回に報告[2]したが，今回は　この計算法を非対称吊橋，さらには，多径間吊橋に拡張することを試みる。また，撓度理論では扱い得ない橋軸方向振動の連成の問題を考慮するための方法として，有限変形理論[3),4)]による計算法を同時に説明する。そして，各種の数値計算例の結果を報告する。

2. 撓度理論　補剛桁が　階段状に変化する曲げ剛性によって，m 区間に分割される，n 径間非対称吊橋を考える。ただし，死荷重は近似的に　各径間において，等分布とする。

曲げ剛性 EI が一定である区間長 ℓ のある区間では，線形化撓度理論に対応する振動問題の基礎微分方程式から得られる振動モード η の解は　円振動数 ω を用いて，

$$\eta = A\cos\mu\frac{x}{\ell} + B\sin\mu\frac{x}{\ell} + C\cosh\nu\frac{x}{\ell} + D\sinh\nu\frac{x}{\ell} + \frac{g}{\omega^2 H_w}h \tag{1}$$

$$\mu = \left\{\frac{H_w\ell^2}{2EI}\left(\sqrt{1+\frac{4EIw}{H_w^2 g}\omega^2} - 1\right)\right\}^{1/2}, \quad \nu = \left\{\frac{H_w\ell^2}{2EI}\left(\sqrt{1+\frac{4EIw}{H_w^2 g}\omega^2} + 1\right)\right\}^{1/2}$$

なる式で与えられる。ここに，w, H_w, h は　それぞれ，その区間の属する径間の死荷重，死荷重時のケーブル水平張力，慣性力によるケーブル付加張力の水平成分である。式(1)から，全区間全径間について，ω 以外に，$4m$ 個の積分定数，および，n 個の付加張力の水平成分を未知数として持つことが解る。一方，与えられる条件式は　$4m$ 個の境界条件，すなわち，支持条件あるいは，隣接区間との連続条件，および，n 個の各径間において成立するケーブル方程式である。従って，これらの $(4m+n)$ 個の条件式を用いて，以下のように振動数方程式が求められ，そして，ω 以外の未知数は相対値として決定される。

まず，次式に示す支持条件，および，隣接区間との連続条件

$$\begin{array}{lllll}
\eta_{i-1,x_{i-1}=\ell_{i-1}} = 0, & EI_{i-1}\eta''_{i-1,x_{i-1}=\ell_{i-1}} = 0, & \eta_{i,x_i=0} = 0, & EI_i\eta''_{i,x_i=0} = 0 & \text{(単純支持)} \\
\eta_{i-1,x_{i-1}=\ell_{i-1}} = 0, & \eta_{i,x_i=0} = 0, & \eta'_{i-1,x_{i-1}=\ell_{i-1}} = \eta'_{i,x_i=0}, & EI_{i-1}\eta''_{i-1,x_{i-1}=\ell_{i-1}} = EI_i\eta''_{i,x_i=0} & \text{(連続支持)} \\
\eta_{i-1,x_{i-1}=\ell_{i-1}} = \eta_{i,x_i=0}, & \eta'_{i-1,x_{i-1}=\ell_{i-1}} = \eta'_{i,x_i=0}, & EI_{i-1}\eta''_{i-1,x_{i-1}=\ell_{i-1}} = EI_i\eta''_{i,x_i=0}, & EI_{i-1}\eta'''_{i-1,x_{i-1}=\ell_{i-1}} = EI_i\eta'''_{i,x_i=0} & \text{(連続条件)}
\end{array} \tag{2}$$

とにより，$4m$ 個の積分定数，n 個の付加張力の水平成分を　それぞれ，要素とするベクトル $\mathbf{a}$，$\mathbf{h}$ を用いて，

$$\mathbb{H}\cdot\mathbf{a} = \mathbb{D}\cdot\mathbf{h} \qquad (\mathbb{H}: 4m\times 4m,\ \mathbb{D}: 4m\times n) \tag{3}$$

なるマトリクス式が得られる。さらに，各径間において成立するケーブル方程式から，

$$\mathbb{G}\cdot\mathbf{a} = \mathbb{E}\cdot\mathbf{h} \qquad (\mathbb{G}: n\times 4m,\ \mathbb{E}: n\times n) \tag{4}$$

なる関係式も得られる。なお，$\mathbb{E}$ に，塔の両側径間におけるケーブル付加張力の水平成分の差異による，塔頂水平移動効果に対応する要素が含まれていることは言うまでもない。式(4)を式(3)に代入して $\mathbf{h}$ を消去すれば，明らかに，$\mathbf{a}$ に関する同次方程式が与えられる。

故に，*Cramer's rule* から，ω に関する超越方程式として，

$$|\mathbb{H}-\mathbb{D}\cdot\mathbb{E}^{-1}\cdot\mathbb{G}|=0 \tag{5}$$

なる振動数方程式が求められる。なお，もし，対称吊橋である場合には，逆対称，対称条件から，左半分の構造を考慮するのみで式(5)と同様の式が与えられるのはもちろんである。

3. 有限変形理論

初期軸歪 ε_0 を有する伸び剛性 EA，無応力長 l_0 の部材に対して，

$$\widetilde{\mathbb{K}}(\varepsilon_0)=\mathbb{K}_0+\mathbb{K}_g(\varepsilon_0) \tag{6}$$

$$\mathbb{K}_g(\varepsilon_0)=\frac{EA}{l_0}\varepsilon_0\begin{bmatrix}0&0&0&0\\ &1&0&-1\\ &&0&0\\ \text{SYMM.}&&&1\end{bmatrix}\left(\begin{matrix}\text{両端}\\ \text{ヒンジ結合}\end{matrix}\right)\qquad \mathbb{K}_g(\varepsilon_0)=\frac{EA}{l_0}\varepsilon_0\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\ &6/5&l_0/10&0&-6/5&l_0/10\\ &&2l_0^2/15&0&-l_0/10&-l_0^2/30\\ &&&0&0&0\\ &&&&6/5&-l_0/10\\ \text{SYMM.}&&&&&2l_0^2/15\end{bmatrix}\left(\begin{matrix}\text{両端}\\ \text{剛結}\end{matrix}\right)$$

なる式で，接線剛性が与えられる。ここに，$\mathbb{K}_0$ は通常の線形剛性マトリクスである。

吊橋の各径間のケーブルが等分布死荷重に対して，所定のサグを有する放物線形状となり，かつ，塔が直立すると仮定すると，塔および，ケーブルの軸力分布が容易に計算される。従って，逆算によって，無応力長 l_0，さらには，初期軸歪 ε_0 を決定することができる。故に，これらの量を用いて，$\widetilde{\mathbb{K}}(\varepsilon_0)$ を作れば，全死荷重載荷時の補剛桁無応力状態の条件を満足する固有値問題が　全体構造系について次式のように得られる。

$$|\widetilde{\mathbb{K}}(\varepsilon_0)-\omega^2\mathbb{M}|=0 \tag{7}$$

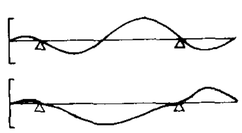
ここに，$\widetilde{\mathbb{K}}(\varepsilon_0)$，$\mathbb{M}$ は　それぞれ，全体構造系での接線剛性，質量マトリクスである。

4. 数値計算例

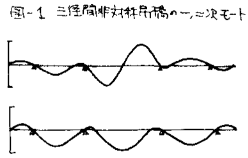
南備讃瀬戸大橋計画設計断面を基にした，各種の計算例の結果を示す。

表－1 三径間対称吊橋の固有周期 (SEC)

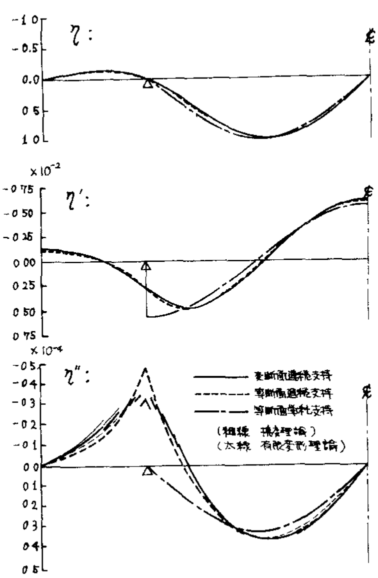
	補剛桁	逆対称一次	逆対称二次	対称一次	対称二次
撓度理論	変断面PL-GIR（連続支持）	7.38	3.19	5.65	4.39
	等断面PL-GIR（連続支持）	7.54	3.23	5.69	4.44
	等断面PL-GIR（単純支持）	8.17	3.29	5.98	4.48
有限変形理論	変断面TRUSS（連続支持）	7.46	3.28	5.84	4.45
	変断面PL-GIR（連続支持）	7.40	3.19	5.80	4.40
	等断面PL-GIR（連続支持）	7.56	3.23	5.83	4.45
	等断面PL-GIR（単純支持）	8.03	3.31	6.02	4.52



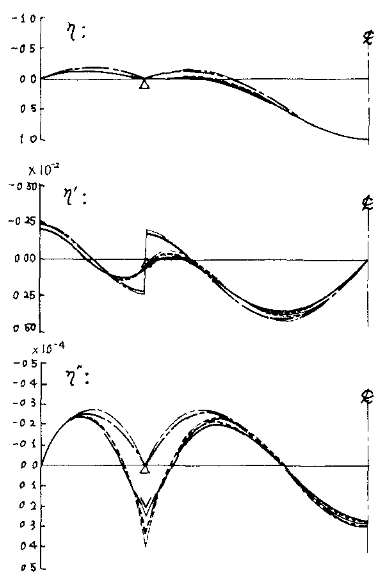
図－1 三径間非対称吊橋の一，二次モード



図－2 五径間対称吊橋の逆対称一次，対称一次モード



図－3 三径間対称吊橋の逆対称一次モード



図－4 三径間対称吊橋の対称一次モード

5. むすび

数値計算例の結果から，本文で述べた二種の計算法を併用すれば，より合理的な吊橋の動的設計が可能であると思われる。なお，計算には FACOM230-75（京大大型計算機センター）を用いた。

1) Bleich F et al,："The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges" U.S. Gov (1950)，2) 前田・林 前田："吊橋振動解析の一解法" 昭和49年度関西支部年次学術講演会 (1974)，3) Chaudhury N.K. et al,："Analyses of Vertical Flexular Oscillations of Suspension Bridges by digital computer" Int. Sympo. on Suspension Bridges (1966)，4) 林 保田："吊橋の振動解析" 第28回土木学会年次学術講演会 (1973).