非比例減衰系の動的応答について

京都大学 工学部　正員　山田善一
京都大学 工学部　正員　○河野健二

1. まえがき

非比例減衰となる多自由度系に地震波のような不規則な外力が作用するとき，動的応答を計算する方法として次のようなものがあげられる。マトリックスの形で直接に階差式を利用して step-by-step に，あるいは直接積分により応答を計算する方法と，モーダルアナリシスを利用して，応答に及ぼす影響が大きいモードのみを取り出して近似的に計算を行う方法がその主なものである。直接にマトリックスを用いると，系の自由度にともなって計算時間は急激に増加し，解の収束性，安定性が重要な問題となってくる。一方モーダルアナリシスの応用は，非常に有用なものであり，応答スペクトルの利用とも関連して多くの動的解析に利用されている。一般に減衰の評価に関しては，多くの問題点があるが，非比例減衰となる系においては，その減衰マトリックスが非減衰時のモーダルマトリックスにより対角化できないので，normal mode により応答を計算する場合，減衰定数の修正を行なう必要が生じる。ここでは非比例減衰マトリックスをもつ系の応答解析について考えてみることにする。

2. 非比例減衰マトリックスの対角化

有限要素法を用いて動的解析を行なう時，各要素の減衰の基礎的な評価が要素の剛性マトリックスや質量マトリックスに比例した形で与えられると，系の減衰マトリックスは容易に構成される。この系がそれぞれの部分で減衰に関して異なる性質をもつ場合，減衰マトリックスは一般に非比例形となる。このような系の運動方程式は一般に次のように与えられる。

$$(1)\qquad [M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F(t)\}$$

いま $[C]$ が非比例減衰マトリックスであると，非減衰時のモーダルマトリックス $[\Phi]$ を用いて対角化できないので，(1) 式は次のような形になる。

$$(2)\qquad [I]\{\ddot{\eta}\}+[\tilde{C}]\{\dot{\eta}\}+[\lceil\omega^2\rfloor]\{\eta\}=\{f(t)\}$$

ここに $\{x\}=[\Phi]\{\eta\}$，$[\Phi]^T[M][\Phi]=[I]$，$[\Phi]^T[C][\Phi]=[\tilde{C}]$

$[\Phi]^T[K][\Phi]=[\lceil\omega^2\rfloor]$，$[\Phi]^T\{F(t)\}=\{f(t)\}$

ところで $[\tilde{C}]$ が何らかの方法で対角化されれば上式は次のように表わされる。

$$(3)\qquad [I]\{\ddot{\eta}\}+[\tilde{C}]^D\{\dot{\eta}\}+[\lceil\omega^2\rfloor]\{\eta\}=\{f(t)\}$$

このように非比例減衰系においても，モードに分解されれば応答計算は，容易に行なわれることになる。ところで非比例減衰マトリックスから対角マトリックス $[\tilde{C}]^D$ を得る方法としては次のようなものがあげられる。

(a)　モーダルマトリックス$[\Phi]$を用いて$[\Phi]^T[C][\Phi]$を計算し非対角項を無視する。

(b)　歪エネルギーに基いて各次モードの重み係数を計算し，減衰が異なる部分の重みつき平均として各次モードの減衰定数を求める。

(c)　モード形から各次モードの重み係数を計算し，減衰が異なる部分の重みつき平均として各次モードの減衰定数を求める。

(d)　モーメント法を利用して減衰マトリックスの対角化を行う。

(e)　複素固有値解析を行い，各次モードの減衰定数を求める。

(f)　(2)式と(3)式の応答の2乗平均誤差を最小化するように modal damping を決める。

(g)　(2)式と(3)式の周波数応答が各次振動のピークで一致するように modal damping を決める。

これらの方法の中で(a)は最も簡単なものであるが，非対角項を無視したときに生じる誤差の影響が明らかでない。(b)，(c)の方法においても計算から求めた modal damping を用いて応答解析を行なう時，その normal mode による応答の近似度は明らかでない。一方(d)のモーメント法を利用すると，2次の統計量を一致させるだけであり，外力は積分可能な簡単なものであることが必要となる。また(e)の複素固有値解析を行うには，(1)式で用いるマトリックスの倍の自由度をもつマトリックスを扱うことになり，自由度の大きい系の解析には困難がともなう。自由度が10程度にモデル化できるような系の応答解析では，複素固有値解析も非常に有用なものである。この際応答解析では，位相を考慮したモードを扱うので計算時間が非減衰時のモーダルマトリックスを利用した時と較べて急激に増加する。ところで(f)では normal mode に関して$[\tilde{C}]$と$[\tilde{C}]^D$のそれぞれの系の応答の2乗平均誤差が最小化するように$[\tilde{C}]^D$を決める。また(g)では，同じように normal mode に関して各次振動における$[\tilde{C}]$と$[\tilde{C}]^D$のそれぞれの系の応答のピークが一致するように$[\tilde{C}]^D$を決めるので，非減衰時のモーダルマトリックスを利用する上で非常に有効なものであると考えられる。(f)での最小化は次のように行う。

つまり

$$(4)\qquad \frac{\partial L}{\partial C_k}=0 \qquad\qquad ここに\quad L=\int_0^{t_0}\left(\{\tilde{\eta}\}-\{\eta\}\right)^T\left(\{\tilde{\eta}\}-\{\eta\}\right)dt$$

$$\{\tilde{\eta}\}-\{\eta\}=\sum_k\left(\frac{\partial\{\tilde{\eta}\}}{\partial C_k}\right)_{\{\tilde{\eta}\}=\{\eta\}}\Delta C_k$$

となるようにk次モードの減衰をΔC_kだけ修正する。

このようにして非比例形の減衰マトリックスが対角化されれば応答解析はモーダルマトリックスを用いて簡単に行なうことができる。しかも応答に及ぼす影響が大きなモードの数は少なく，自由度が大きい多自由度系の解析では，さらにモーダルアナリシスの適用性が重要になってくる。

3.　あとがき

構造物を含む基礎地盤系の応答解析を行なう時，系のそれぞれの部分は異なる減衰を有するため　モーダルアナリシスを適用する際，非比例減衰マトリックスの対角化が必要になる。有限要素法を用いてこのような系の応答解析に対角化を行なったので，その結果は当日発表する。

参考文献　N. C. Tsai, "Modal Damping for Soil-Structure Interaction," ASCE, EM2, April, 1974