

振れ幅分布について

京都大学工学部	正員	小西一郎
京都大学工学部	正員	白石成人
鹿島建設	正員	○岩田充功
新日本製鉄	正員	青野雄司

1. まえがき

不規則外力を受ける構造物の応答は、一般に不規則であり、連続な確率過程と考えられる。応答としての応力過程における振れ幅が、疲労におけるき裂伝播速度と支配していることが従来の研究に示されており、その結果、確率過程における振れ幅の特性と求めることが重要と考えられる。従来の研究において、J.R.RiceやJ.N.Yangは確率過程における振れ幅の確率分布やモーメントに対する近似解を提案しているが、それぞれ用いられた手法や仮定により適用範囲が制限されている。よって本研究では、両者の適用には精度上問題があるような狭帯域確率過程に対する近似解を提案する。

2. 振れ幅分布に対する近似式

ここに述べる振れ幅とは、連続な過程におけるところの隣り合うトラフとピークのレベルの差を意味するものであり（図1参照）、定常確率過程 $X(t)$ における振れ幅の確率分布は次のように定義される。

$$P_h(h) = \int_0^\infty P(\alpha, \alpha+h, \tau) d\tau \quad (1)$$

ただし、 $P(\alpha, \beta, \tau)$ は、 $t=0$ で $X(t)$ がトラフとなる条件下で、その後初めて現われるピークが $t=\tau$ で起り、それぞれのレベルが $X(0)=\alpha$ 、 $X(\tau)=\beta$ である確率密度を表わす。

$P(\alpha, \beta, \tau)$ が厳密には求めることができないことから、本研究では $\dot{X}(t)$ とその導関数 $\ddot{X}(t)$ の関係を用いて $P_h(h)$ を近似する。いま $X(t)$ 、 $\dot{X}(t)$ の標本関数を $x(t)$ 、 $\dot{x}(t)$ とすると、 $x(t)$ の振れ幅と $\dot{x}(t)$ には図1のような関係がある。 $X(t)$ が狭帯域確率過程である場合、一般に $\dot{X}(t)$ も狭帯域確率過程と考えられることから

$$\dot{X}(t) = A(t) \sin \theta(t) \quad (2)$$

とおける。ただし、 $A(t)$ 、 $\theta(t)$ はそれぞれ互いに独立であり、 t に関して $\dot{X}(t)$ よりゆっくり変動する確率過程であり、その標本関数を $a(t)$ 、 $\theta(t)$ とする。

$A(t)$ 、 $\theta(t)$ は t の小区間においてはほぼ直線的に変化すると考えられることから、図2の h_1 は次のように近似される。

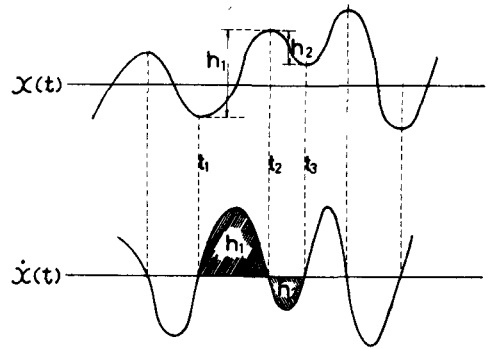


Fig. 1 DEFINITION OF RISE h_1 AND FALL h_2

$$h_1 = \int_{t_1}^{t_2} \dot{X}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} a(t) \sin \theta(t) dt \approx a(t_1, t_2) \cdot \tau \quad (3)$$

ただし、 $a(t_1, t_2)$ は t_1 から t_2 までの $\dot{X}(t)$ のピーク値、 τ は $t_2 - t_1$ を表わす。

この関係を用いて、 $X(t)$ の振幅の確率分布を求めると、その密度関数は

$$P_h(h) \approx \int_0^{\infty} P_A\left(\frac{\pi h}{2\pi}\right) \cdot P_T(\tau) \cdot \frac{\pi}{2\tau} d\tau \quad (4)$$

と近似される。ここで、 $P_A(\omega)$ 、 $P_T(\tau)$ はそれぞれ、 $\dot{X}(t)$ のピーク、ゼロ横断時間間隔の確率分布を表わす。 $P_T(\tau)$ に関しては厳密解が得られていないため、狭帯域であることと考慮して次のように近似する。

$$P_T(\tau) \approx \frac{P_0(\tau) \exp\left\{-\int_0^{\tau} P_0(s) ds\right\}}{\int_0^{\infty} P_0(\tau) \exp\left\{-\int_0^{\tau} P_0(s) ds\right\} d\tau}, \quad P_0(\tau) = \begin{cases} P(\tau) & , 0 \leq \tau \leq \tau_a \\ \frac{P(\tau_a)}{\tau_b - \tau_a} (\tau_b - \tau) & , \tau_a < \tau \leq \tau_b \\ 0 & , \tau_b < \tau \end{cases} \quad (5)$$

ここに用いる $P(\tau)$ は $\dot{X}(t)$ が $t=0$ で正方向にゼロ横断し、 $t=\tau$ で負方向にゼロ横断するときの確率密度を表わし、 τ_a 、 τ_b はそれぞれ、それ以上の $P(\tau)$ を直線化してもよいと考えられるピーク値、それ以上の $P(\tau)$ を無視してもよいと考えられるピーク値を表わす。

なお、 $P_A(\tau)$ 、 $P_T(\tau)$ は $\dot{X}(t)$ 、 $\ddot{X}(t)$ 、 $\ddot{X}(t)$ の結合確率密度を用いることにより求められる。

$$P_A(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\ddot{X}\ddot{X}\ddot{X}}(\xi, 0, \eta) d\eta / \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\ddot{X}\ddot{X}}(\xi, 0, \eta) d\eta \quad (6)$$

$$P_T(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_{\ddot{X}\ddot{X}\ddot{X}}(0, \eta_1, 0, \eta_2, \tau) d\eta_1 d\eta_2 / \int_0^{\infty} f_{\ddot{X}\ddot{X}}(0, \eta) d\eta \quad (7)$$

また、振幅のモーメントは $\dot{X}(t)$ のピークのモーメントとゼロ横断時間間隔のモーメントを別々に求めることにより得られる。特に、平均値に関しては、 $\dot{X}(t)$ のゼロ横断時間間隔 $E[\tau]$ とゼロ期待横断率 $E[N]$ の関係を用いることにより非常に簡単に表わせる。

$$E[h] \approx \frac{2}{\pi} E[A] E[\tau] \approx \frac{2}{\pi} \frac{E[A]}{E[N]} \quad (8)$$

3. 数値計算例

図2に示すようなパワースペクトル密度をもつ定常ガウス確率過程に適用すると、 $\beta=0.75$ の場合、振幅の確率密度は図3のようになり、従来の手法よりもよい結果が得られることがわかった。さらに式(8)の平均値に関しては、 $0 \leq \beta < 1$ に対して非常によく一致していることがわかった。

参考文献) Yang, J.N., "Statistics of Random Loading Relevant to Fatigue," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, June 1974

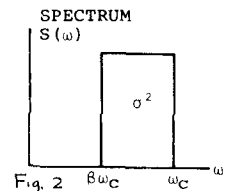


Fig. 2

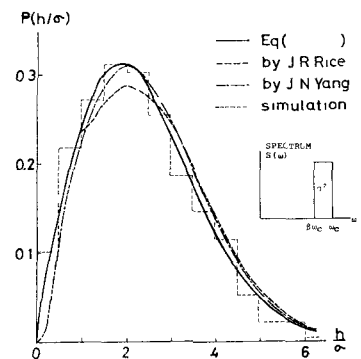


Fig. 3 RISE AND FALL DENSITY, ideal spectrum with $\beta=0.75$