

材料の塑性変形能が平板の曲げ耐力に与える影響について

大阪市立大学 工学部 正員 園田 萬一郎
 大阪市立大学 工学部 学生員 坂口 修司

極限設計法(塑性設計法)においては、使用材料または構造要素は弾・完全塑性体であり、弾性限界後は応力の再配分に必要な塑性変形を起こし、構造の全体または一部が運動学的許容なメカニズムになるまで荷重は増大しつづけると仮定されている。しかし、コンクリート、岩石、土(密な砂と過圧密粘土)などの材料では、応力-ひずみ曲線の一部に降下領域を持ち、圧縮を受ける金属棒、板、殻においても、局部座屈発生後は構造要素としての力と変形の間に同様な不安定領域を持つ。このような不安定材料(Unstable Material)や不安定構造要素を持つ構造物に極限設計法を適用することができるかどうかは興味ある問題である。この問題の一つに鉄筋コンクリートの塑性ヒンジにおける回転容量の問題がある。これに関して、A.L.L. Baker¹⁾は Trial and Adjustment Method により、塑性ヒンジの回転量にある制限内にて、塑性設計することができることを示した。同様の方法は鉄筋コンクリート床板の問題にも適用できるものと思われる。

本研究では、材料の塑性変形能が構造物の終局荷重にどのように影響するかを曲げを受ける平板に対して調査した。塑性逸散エネルギー率を $\dot{D}$ とすれば、 $\dot{D} = \int_A C Q \dot{\epsilon} dA$ —— (1) ここに C は正のスカラー関数、 Q は一般化した応力とひずみ増分であり、平板の曲げ問題に対しては、 $C=1$, $Q=(M_1, M_2)$, $\dot{\epsilon}=(\dot{\kappa}_1, \dot{\kappa}_2)$, ここに $M_1, M_2, \dot{\kappa}_1, \dot{\kappa}_2$ は主モーメントと主曲率増分である。図1の Q - $\dot{\epsilon}$ 曲線のように加工軟化(Work Softening)領域を持つ材料または構造要素に対して、A.C. Palmer²⁾ は、「1サイクルの応力経路またはひずみ経路によって成す仕事は非負である」とし、安定材料に対して Drucker³⁾ が示した降伏曲面の凸性および塑性ひずみ増分ベクトルの直交性がなお成立することを指摘した。2次元、3次元応力問題では、図1の一軸応力-ひずみ関係に対応した降伏曲面の形状、塑性関係式を定義しなければならない。当面の問題を鉄筋コンクリート床板にしばれば、塑性変形能はコンクリートの圧壊によって支配される。2軸圧縮を受けるコンクリートは Mohr 理論によるせん断破壊に従うものとすれば、軟化領域での降伏曲面の変化は図2(a)のように想定できる。さらに降伏後の応力の変化が極端(例えば、圧縮から引張に変化する)でなければ、軟化領域での降伏曲面は一樣に収縮するとしても、終局荷重の計算値に大きな影響を与えないであろう。以下、図2(b)の Mises 型の降伏条件式に従う円板を例にとって解析方法を説明する。降伏関数 Φ を $\Phi = M_r^2 - M_r M_\theta + M_\theta^2 = M_0^2(e)$, $e = \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \nabla \Phi dt$ —— (2) ここに K は曲率ベクトル、 ∇ はナブラ、 t_0 は軟化領域に入った時刻で、 $t \leq t_0$ に対して、 $M_0(e) = M_0$, $t_0 < t < \infty$ に対して $M_0 > M_0(e) > 0$ である。周知の塑性流動理論より、

$$\dot{M}_r = D(\dot{\kappa}_r + \nu \dot{\kappa}_\theta) - D \, d\mu \left(\frac{\partial \Phi}{\partial M_r} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial M_\theta} \right), \quad \dot{M}_\theta = D(\dot{\kappa}_\theta + \nu \dot{\kappa}_r) - D \, d\mu \left(\frac{\partial \Phi}{\partial M_\theta} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial M_r} \right) \quad (3)$$

ここに $d\mu$ は正のスカラー係数で、見荷経路(図1の $A \rightarrow B \rightarrow C$)に対して、 $\dot{\Phi} = 2 M_0(e) \dot{M}_0(e)$ より

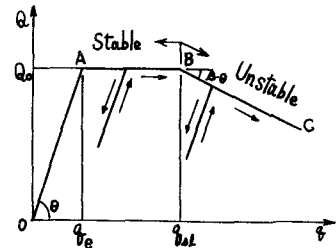


図1 応力-ひずみ曲線

$$d\mu = \frac{(\frac{\partial \Phi}{\partial M_r} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial M_\theta}) \dot{K}_r + (\frac{\partial \Phi}{\partial M_\theta} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial M_r}) \dot{K}_\theta - 2M_0(E) \dot{M}_0(E)/D}{\frac{\partial \Phi}{\partial M_r} (\frac{\partial \Phi}{\partial M_r} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial M_\theta}) + \frac{\partial \Phi}{\partial M_\theta} (\frac{\partial \Phi}{\partial M_\theta} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial M_r})} \quad (4)$$

図・1に示すような直線的な加工硬化特性を持つ場合には、 $\dot{M}_0(E) = -\beta D \dot{K} \nabla \Phi$ 、——(5) ここに β は硬化率、式(5)を式(4)に代入し、 $d\mu = g_1 \dot{K}_r + g_2 \dot{K}_\theta$ と表示すれば、式(3)より、

$$\begin{Bmatrix} \dot{M}_r \\ \dot{M}_\theta \end{Bmatrix} = D \begin{Bmatrix} 1, \nu \\ \nu, 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{K}_r \\ \dot{K}_\theta \end{Bmatrix} - D \begin{Bmatrix} g_1 \psi_a & g_2 \psi_a \\ g_1 \psi_b & g_2 \psi_b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{K}_r \\ \dot{K}_\theta \end{Bmatrix} \quad \psi_a = (2-\nu)M_r - (1-2\nu)M_\theta \\ \psi_b = (2-\nu)M_\theta - (1-2\nu)M_r \quad (6)$$

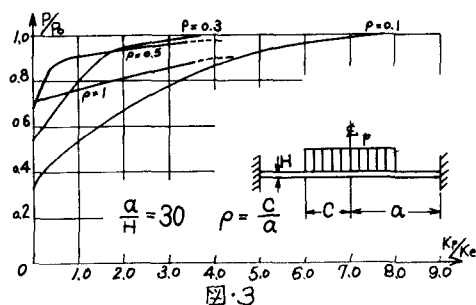
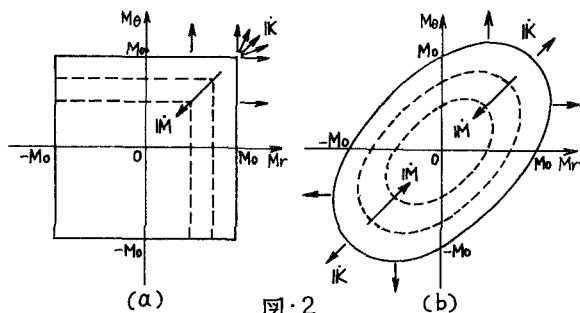
式(6)を円板のつり合い方程式： $\frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (2M_r - M_\theta) = -\dot{p}(r)$ に代入すれば、荷重増分 $\dot{p}(r)$ または変位増分 $\dot{w}(r)$ に関する基礎方程式を得らる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \dot{w} = \frac{\dot{p}}{D} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} [g_1 \psi_a \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} + g_2 \psi_a \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial r}] \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [(2g_1 \psi_a - g_1 \psi_b) \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} + (2g_2 \psi_a - g_2 \psi_b) \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial r}] \end{aligned} \quad (7)$$

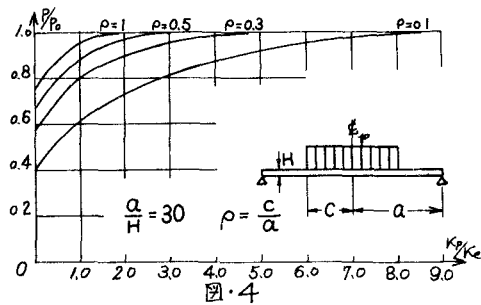
式(7)の数値解析法は文献(4)を参考せよ。

各種の塑性変形能を持つ円板の終局荷重を図・3

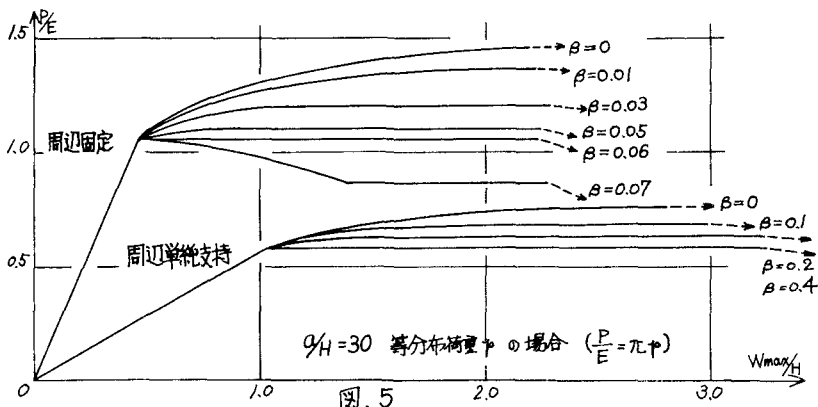
図・4、図・5に示す。



図・3



図・4



図・5

図・3・4は図・1の $\beta = \infty$ の場合で
 P_0 は理想弾完全塑性体に対する終局荷重
 K_e は弾性限界曲率
 K_p は塑性限界曲率

図・5は図・1で $\beta_e = \beta_{pl}$ の場合
 β の各値に対する荷重最大値の曲線

引用文献 (1) Jour. I.C.E., Vol.35, No.4, Feb. PP262-298

(2) Jour. App. Mech. Vol.34, June 1967, PP464-470

(3) Proc. Ist. U.S. National Congress of Appl Mech. 1951, PP487-491

(4) 大阪市立大学工学部紀要 Vol.15, 1974