構造物の形状と構造剛性行列の最小帯幅について

京都大学工学部　正員　小西一郎
京都大学工学部　正員　白石成人
京都大学工学部　正員　○谷口健男

1．まえがき

従来，バンドマトリクス法が構造解析の分野で，しばしば用いられてきたが，これは土木構造物の剛性行列が，いわゆる帯行列となる特性を利用しようとするものである。今日までにその帯行列の帯幅を減少せしめるアルゴリズムは，いくつか提案されてはいるが[1]それらは対象系の形状により，その結果は大きく支配され汎用性をもつものはないと言っても過言ではない。特にそれらの手法で不得手もしくは無視されてきた構造物の形状として，次の2つが挙げられる。

(i) 構造物の外周辺に凹凸が存在する場合

(ii) 節点分布密度が不均一な場合

筆者らは，すでに上記のような形状特性により結果の支配されない図式帯幅減少法を提案しているが，ここでは，まずその概略を紹介し，つづいて構造物の形状と，その剛性行列の最小帯幅値との関係について考察を加える。

2．図式帯幅減少法[2]

ここに紹介する方法は，従来の帯幅減少法とは全く異なり，図式解法であり，その基本となる考え方は，帯幅値の不明な系をそのトポロジーを保存したまま帯幅値の明白な系に画き直し，その図形より最小値を得ようとする。そのために，"filing field" と呼ばれる座標系（図－1）を定義するが，それには次のような規則が定められている。

(i) 2次元面に等間隔に縦・横線が引かれ，その交点に唯一個の節点が配置される。この時，縦・横方向に並んだ点列を "nodal column"，"nodal row" と呼ぶ。

(ii) 線分は，左・右，上・下，および右下り・左上り方向にしか配置できない。

(iii) 1本の線分は，相隣る nodal column 間，もしくは同一 nodal column 内の2点を結ぶのに用いられる。

(iv) 節点番号は filing field に固定されている。すなわち，この座標系内に図形が画かれた後，その一番右側点列上端点より下方に，次に第2点列上端にと順次節点番号を付す。

これら諸規則により，系の剛性行列の帯幅値に関係する2節点間の最大番号差は，最大個数の節点を含む点列内で横方向線分の位置に生じる。その点列に含まれる点個数を n とすれば，帯幅値（H.B.W.）は，

$$\mathrm{H.B.W.} = n + 1.$$

これにより，帯幅減少法はその図形をこの座標内に最小高さをもつように画くという図形の画き方に置換された。

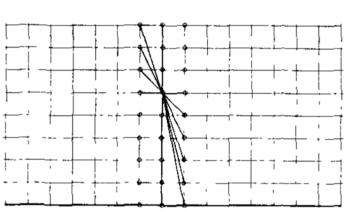
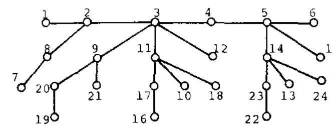


図1　ファイリング フィールド

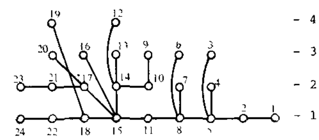
本手法の利点としては ① 節点番号を付けずに帯幅値を得ることができる，② 図式解法であることより結果

の良否は明白である ③. 構造形状により結果は支配されない，等が挙げられる。

ここで対象系はどのような土木構造物でもよいが、ここで取り扱う図形とは、その剛性行列内の非零要素配列をグラフ表現した図形である。その適用の一例を図－2に示し、他のアルゴリズムによる結果との比較を行う。この図形は Tree Graph と呼ばれるものであり，周辺に凹凸の存在する系と考えられるものであり，本手法の優位は明白である。



(a) 与えられたグラフ (24点)



(b) 帯幅最小を示す図形

Algorithm	Bandwidth	Profile
Original	13	107
Cuthill McKee	10	101
King	13	59
Levy	14	57
Sequential File Method	5	41

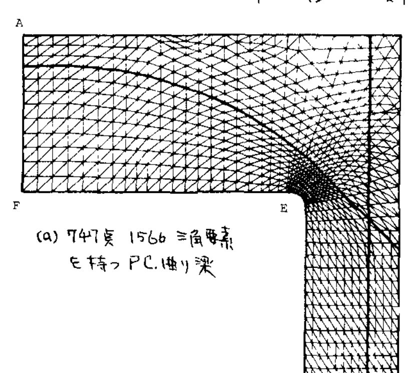
(c) 各手法による結果の比較

図 2 Tree系への帯幅減少法の適用

3. 構造物の形状と構造剛性行列の最小帯幅

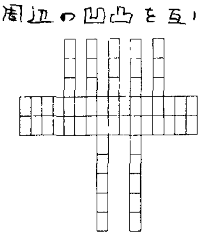
図3～7は周辺形状が凹凸の場合（図3)，点密度が一様でない場合（図4,5）および橋梁を対象とした場合(図6,7)への前節の帯幅減少法の適用例を示している。その各々は常に filing field の高さを最小にするように順次系の点列が座標内にプロットされており，その新たな図形における最高高さを持つ部分がその系の帯幅値を与えることになる。これら図形の画き方については、ここでは詳述しないが，一応の手がかりとして (i) 系の長手方向を座標の横軸に添うようにする，(ii) 系に対称軸が存在すれば，それを利用するが挙げられる。

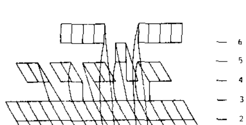
filing field においてその横軸方向が画かれる図形の長手方向に一致させるとすれば，その帯幅を示す縦軸は図形の幅とも言うべきものと考えられる。



(a) 747点 1566 三角要素を持つ PC.曲り梁

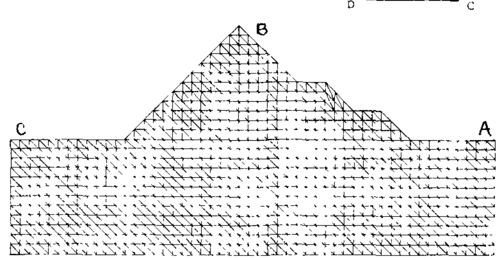
座標の中へ周辺に凹凸の存在する図形をそのまま画けば 新たな図形も凹凸をもつ。しかしここに提案した座標においては，その縦軸が帯幅値を示す以上，上記諸規則を守りながら図形を変形し，縦軸方向の幅を可能なかぎり減少させるべきである。よって，この座標を用い周辺の凹凸を互に埋め合わせ，最終的な形状として 全体的に凸形状の図形を得ようとするものである。しかしながらもちろん凸形状と言えない場合もある(図3)。


(a) 元の形状 (101節点)



(b) 帯幅最小を示す図形 (H.B.W.=7)

図3. 周辺形状の複雑な例題



(b) 帯幅値を示す図形 (H.B.W.=26)

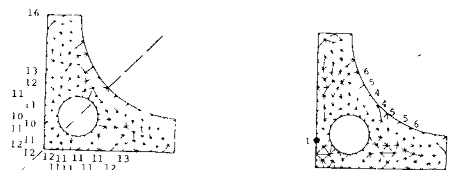
図4 節点密度不均一な例への帯幅減少法の適用例

以上の本手法の考察より得られる結論は，構造剛性行列の帯幅は，その構造物を表示する線形グラフの幅とも言える。

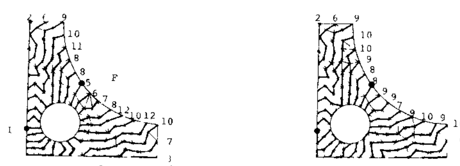
うべきものであり 最小帯幅はグラフを座標内において その縦軸に関して最小の値を与えるような細長いグラフとして画かれた図形の最大幅である。

図形の幅と言っても現実の形状における幅とは一致しない場合がある（図6,7）。一方それら両者がよく一致する場合もある（図4,5）。一般に言って 帯幅減少の困難な場合は前者にあたる。

座標内に点密度不均一な図形を画き直すと、現実の形状と全く異なる場合がある（図4,6）。ここに挙げた例題では該当するものはないが、場合によっては現実の周辺形状が全体として凸であっても点密度均一化により、凹凸が発生する場合もある。このような場合、点密度均一化の後上述のようにその凹凸をならすという操作を行って始めて帯幅減少可能となる。これら2段階の操作は filing field を用いれば容易に可能となる。



(a) 境界上2点を結ぶ最短パス　(b) Iよりの最短パス



(c) I, F を含む最短パスを基準とした場合　(d) 帯幅最小を示す図形

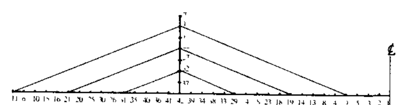
図5. 板を対象とした帯幅減少法の適用例 (H.B.W.=11)

以上のように、一般に点密度一様、かつ全体として凸形状の系は、その長手方向に直角方向の最大幅が一応の最小帯幅の目安となることがわかった。一方、点密度不均一であったり、あるいは外周辺に凹凸が存在する場合は、その現実の形状にとらわれずに、いわゆる長手軸を見い出し、それに直角方向の系の幅を減少せしめるように外周辺を互に埋め合わせ、その最大値が最小帯幅となる。以上まとめると次式が得られる。

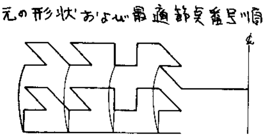
「構造剛性行列の半帯幅」=「図形の幅」+1

4. あとがき

本研究において筆者らがすでに提案した剛性行列の帯幅減少法を用いて構造物の形状とその最小帯幅値との関係をさぐった。その最小値は系の外周辺の凹凸を互に埋め合わせて得られる図形の幅に一致することがわかった。このことより 系の形状をみるだけでその帯幅値の推測が可能な場合があり、従来の帯幅減少法はこのような系に対してのみ良い結果を与えることが可能である。



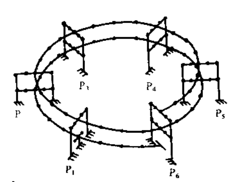
(a) 元の形状および最適節点番号順序



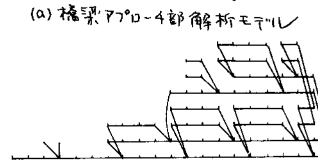
(b) 帯幅最小を示す図形 (H.B.W.=6)

図6 斜張橋への帯幅減少法の適用

三次元構造物を対象とする場合にも、上記座標はそのまま適用可能であるが、その簡便法として 点列(modal column)の代わりに、一つの面を考え よって系を切断する面内に含まれる点個数を最小化するのが、帯幅減少法となる。ただし、面と面間の接続についても 帯幅値に影響を及ぼす要素が含まれ、これは今後の課題として残される。



(a) 橋梁アプローチ部解析モデル



(b) 帯幅最小を表示する図形 (H.B.W.=9)

図7. 橋梁解析モデルへの帯幅減少法の適用

[参考文献] 1). 例えば E. Cuthill, "Several Strategies for Reducing the Bandwidth of Matrices", The IBM Research Symposia Series, Sparse Matrices and Their Applications '72
2). T. Taniguchi, "Application of Topology to Bandwidth Reduction Method of Structural Stiffness Matrix", 1974