

骨組構造物の塑性解析に関する23の考察

京都大学 正 員 小西一郎

京都大学 正 員 白石成人

京都大学 学生員 占田 均

1. まえがき

塑性解析には大別して、動的解析と静的解析の2つがある。静的解析は、まず平衡式を立て次に降伏条件を用いて最大の荷重係数を求めるというもので、それ自体線形計画法(LP)の形をしておりそのInputの容易さ、系統的な形より非常に電子計算機に適合した方法と考えられる。しかしこの方法は1部材について4つの制約式(部材両端での正負の降伏条件)を必要とするので、構造系が巨大化しその部材数が増えると非常に多くの制約式を持つことになる。いまシンプレックス法を用いると、LP演算に要する容量計算時間はこの制約式の数に依存するのでこのような多数の制約式を持つ問題では多くの容量計算時間が必要となる。本研究ではグラフ理論、分割法概念を導入することにより巨大系特に高層ラーメンの解析時の記憶容量計算時間の減少を図る。

2 基礎式の誘導

平衡式は全体座標系および局所座標で次のようにそれぞれ表わせる。

$$\tilde{P}' = A^t \tilde{P} \quad (1)$$

ここで P' : 節点外力 P : 部材端力 A : Branch Node Incidence Matrix

$$P' = T_B A^t T_A^{-1} P \quad (2)$$

 T_A : 部材変換行列 T_B : 節点変換行列 $\sim$: 全体座標系を表わす添字

ここで部材端力を節点外力で表わすには A^t の逆行列が必要となる。しかし、これは一般の不静定構造物では存在しないので任意の点を切断することにより静定系とし A 行列を拡張し正交行列 $\bar{A}$ とする。この時グラフ理論によると次の関係式が存在するので

$$(\bar{A}^t)^{-1} = B_T \quad (3) \quad B_T: \text{Node-to-datum Path Matrix}$$

(2)式は $P' = T_A B_T T_B^t \hat{P}' \quad (4)$ となる。ただし、 $\hat{P}'$ は拡張された節点外力で、切断点における仮想の不静定力も含んでいる。また上式では $T_B^{-1} = T_B^t$ の関係が用いられており平衡式を形成するのに逆行列演算が全く不要となっている。

次に本研究では単純塑性理論を用いるので曲げに對する項のみを取り出す必要がある。これは圧力より次の H という行列と果せることにより行われる。

$$H = \begin{bmatrix} \nearrow H_i \\ \searrow \end{bmatrix} \quad (5) \quad H_i = \begin{bmatrix} 0 & l_i & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6) \quad l_i: i\text{-th 部材の長さ}$$

ここで $\hat{P}'$ を荷重係数 λ と不静定力 ρ に表わすと、

$$P' = H T_A B_T T_B^t \hat{P}' = \rho \begin{bmatrix} \lambda \\ \rho \end{bmatrix} \quad (7)$$

ただし ρ 行列では切断点の連続性は保持されており、その列の次数は荷重係数と不静定力の次数に減少している。次に降伏条件を用いその制約下で最大となる λ を求めることにより崩壊荷重が得られる。そして塑性ヒンジの位置も各部材端力の値より求まる。

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数} & \lambda \longrightarrow \text{Max} \\ \text{制約条件} & P = D \begin{Bmatrix} \lambda \\ q \end{Bmatrix} \leq M_p \end{array} \quad (8) \quad M_p: \text{全塑性モーメント}$$

3 塑性解析への Upper Bound Technique の適用

いま 切断された静定基本系にあたる Tree 系をみると、その切断点の降伏条件は単にその部材端力が全塑性モーメントより小さいであるということになる。この式は他の未知数を含まず独立なものと考えられる。このような Cantilever のような形をもつ部材はその構造物の不静定次数だけ存在するものであり、これをもとめ UBT を用い不必要な要素とその演算より除去することにより、計算時間の短縮、容量の節減が期待できる。

4 分割塑性解析法

以上の手法を用いれば計算時間の短縮、容量の節減がかなり期待できるが、巨大系ではまだ不十分と思われる。そこでここでは分割手法を用いその扱う制約式の数を減らすことを考える。いま図1の3層ラーメンについて考えると、その D 行列は

$$D = \begin{matrix} & \lambda & q_1 & q_2 & q_3 \\ \begin{matrix} S1 \\ S2 \\ S3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 & 0 \\ A_2 & B'_1 & B_2 & 0 \\ A_3 & 0 & B'_2 & B_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (9)$$

となり、降伏条件式は次のように書きかえられる。

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \lambda + B_1 q_1 \leq M_{p1} \\ A_2 \lambda + B_2 q_2 \leq M_{p2} - B'_1 q_1 \\ A_3 \lambda + B_3 q_3 \leq M_{p3} - B'_2 q_2 \end{array} \right\} \quad (10)$$

このとき右辺の q_1, q_2 を定数として与えてやれば (10) 式は各々 独立に扱うことができる。一般的な場合の高層ラーメンの分割手法を次に示す。

Step 1 最上層の崩壊荷重 λ_1 、不静定力 q_1 を L D により求める。

Step 2 Step 1 で求められた q_1 を用い、同様に λ_2, q_2 を求める。

Step 3 Step 2 の操作を最下層まで続ける。

Step 4 このとき全体の崩壊荷重 $\lambda = \min_{i=1}^{n,m} \lambda_i$ (n, m : 層数)

5 結論及びおわりに

巨大系の塑性解析に要する計算時間、記憶容量を減少させるためにグラフ理論に注目し、分割手法の概念を用い、各部分系間に仮想の不静定力を導入し、それを未知数ととることににより上層の影響がうまく伝達され、他の分割手法より良い結果が得られた。またこの方法は iteration を含みないので、その計算時間は元の手法の約半分程度にまで下がり、L D の演算時間、容量が制約条件の数の 2 果に比例することと考えると、巨大系で非常に有利になるとと思われる。現在、この方法を設計問題への拡張を行っている。(数値計算は当日発表)

参考文献 1) R. L. Livesley, "The Selection of Redundant Forces in Structures with an Application to the Collapse Analysis of Frames", Proc. Roy. Soc. 1967

2) G. B. Dantzig & P. Wolfe, "A Decomposition Principle for Linear Programming", O R J 1960

図1 3層ラーメン

