有限要素法による粘弾性体解析方法に関する二、三の検討

神戸大学大学院　学生員　○西田和範
神戸大学工学部　正会員　　桜井春輔

1．まえがき

粘弾性問題の有限要素解析法には、大きく分けて二つのアプローチがある。一つはLaplace変換などの積分変換を用いることにより、時間に依存する粘弾性体の構成式の時間変数をとり除いて解析する方法で、他の一つは増分理論に代表されるStep by Step methodによる解析法で、変形の全過程を何段階かに分割し、各段階においては区分的に線形理論を用いる方法であり、非線形問題も線形の場合とまったく同様に取り扱うことができる。本研究は上記の二通りの有限要素解析法を簡単なモデルに適用し、その得失に対して考察を加えることを目的とする。

2．線形粘弾性体の構成式

等質等方の線形粘弾性体においては、その形状変化と体積変化は互いに独立である。したがって、偏差成分と体積成分とに分離して考えると、対応する構成式はそれぞれ次のBoltzmannの記憶積分の形で表示できる。

$$\varepsilon'_{ij}(x_k,t)=\int_{-\infty}^{t} J_D(t-\tau)\frac{\partial\sigma'_{ij}(x_k,\tau)}{\partial\tau}d\tau \qquad (1)$$

$$\varepsilon_{mm}(x_k,t)=\int_{-\infty}^{t} J_V(t-\tau)\frac{\partial\sigma_{mm}(x_k,\tau)}{\partial\tau}d\tau \qquad (2)$$

ここで、$J_D(t)$, $J_V(t)$はそれぞれ形状変化および体積変化に対するクリープ関数を示し、次のように表わすことができるであろう。

$$J(t)=J_0+\sum_{i=1}^{N} J_i\left[1-\exp(-t/T_i)\right] \qquad (3)$$

3．対応原理を用いた有限要素解析

初期応力および初期ひずみが存在しない場合、上記の構成式にLaplace変換を施せば、

$$\bar{\varepsilon}'_{ij}(x_k,s)=\bar{J}_D(s)\cdot s\,\bar{\sigma}'_{ij}(x_k,s)\equiv\left[1/2G(s)\right]\cdot\bar{\sigma}'_{ij}(x_k,s) \qquad (4)$$

$$\bar{\varepsilon}_{mm}(x_k,s)=\bar{J}_V(s)\ s\,\bar{\sigma}_{mm}(x_k,s)\equiv\left[1/3K(s)\right]\cdot\bar{\sigma}_{mm}(x_k,s) \qquad (5)$$

像空間における構成式(4),(5)は、弾性体に対するものとみかけ上まったく同形である。その他の場の方程式に対しても同様にLaplace変換を施し、すべての時間変数を除けば、線形粘弾性体のすべての場の方程式は弾性体のそれと形式的に一致する。像空間における対応する弾性問題の解析に有限要素法を適用する場合、要素の剛性方程式は次のように表わされる。

$$\{\bar{F}(s)\}=[\bar{K}(s)]\{\bar{U}(s)\} \qquad (6) \qquad ここで\ [\bar{K}(s)]=\int_V [B]^T[\bar{D}(s)][B]\,dV \qquad (7)$$

$\{\bar{F}(s)\}$, $\{\bar{U}(s)\}$はそれぞれ等価節点力および節点変位をLaplace変換したものである。式(6)を各節点において重ね合わせて得られる構造物全体の剛性方程式を解き、その結果を逆変換す

れば、各節点の変位 $\{U(t)\}$ を求めることができる。なお、この場合クリープ関数が式(3)で表わし得るならば、材料の粘弾性挙動もまたそれと類似の級数で表わすことが可能であろう。したがって、像空間における変換引数 S をパラメーターとする解は、式3にLaplace変換を施した級数と類似の形であると仮定することができる。

4．増分形式による有限要素解析

ここで用いる方法については文献(1)に示してあるので、ここでは説明を省略する。

5．解析結果

対応原理を用いた有限要素法、および増分形式による有限要素法の得失を検討するために、図に示すような一軸引張応力状態における粘弾性棒について解析を行なう。ここで、対応原理を用いた方法においては、各節点変位の経時的変化を図のカ学モデルのクリープ関数と類似な級数で表わし得るとして、

$$U(t)=S_0+S_1\left[1-\exp\left(-t/\tau\right)\right] \qquad (8)$$

と仮定する。(8)式のLaplace変換は

$$\bar{U}(s)=\left[S_0+S_1/(1+\tau s)\right]/s \qquad (9)$$

図3は、S をパラメーターとして有限要素解析を行なった結果である。これは式9に対応しており、曲線に十分fitするように式9の係数 S_0, S_1, τ を決定すれば、対応する節点の変位の経時的変化が決定されたことになる。図4にその結果を示す。この方法によって得られる解の精度は、逆変換の際にとられる級数項の数に影響されるが、この例からもわかるように、一般的にわずかの数の級数項でも高い精度を得ることができるといわれている。[2] また、時間空間における増分形式による Step by step の計算の結果も合わせて示す。図から明らかなように、これらの結果は理論解と非常に良い一致を示している。なお、ここでの問題においては、この二通りの有限要素解析法にはあまり差違はないが、積分変換を用い得ないような非線形問題に対しては、増分形式による方法が有利であることは言うまでもない。

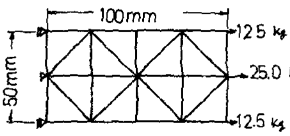

図1

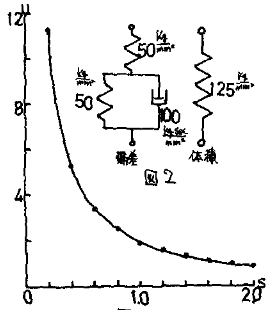

図2

図3

s	$\bar{U}$
0.2	11.258
0.4	5.228
0.6	3.304
0.8	2.386
1.0	1.8[illegible]
1.2	1.512
1.4	1.272
1.6	1.097
1.8	0.963
2.0	0.867

表1

t \ U	厳密解 ($\times10^{-2}$)	F.E.M (対応)	F.E.M (増分)
0	0.0150	0.01503	0.0150
2	0.02167	0.02170	0.02173
4	0.02407	0.02410	0.02410
6	0.02494	0.02496	0.02495
8	0.02527	0.02527	0.02527
10	0.02539	0.02538	0.02538
12	0.02543	0.02542	0.02542
	0.02545	0.02544	0.02544

表2

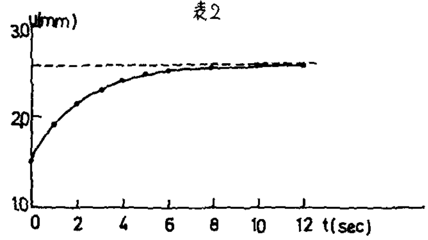

図4

〔参考文献〕

(1) 桜井, 藤田：有限要素法の粘弾性体への適用, 土木学会関西支部講演概要, S.44

2) R.A. Adey, C.A. Brebbia: Efficient Method for Solution of Viscoelastic Problems, A.S.C.E, Journal of the Engineering Mechanics Division, 1973