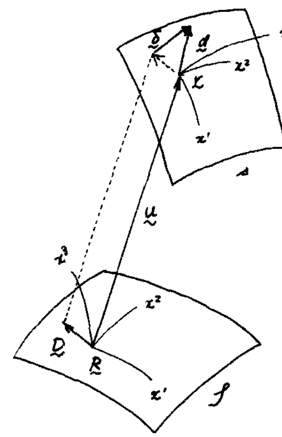
I－4

積分方程式法によるシェル問題の解析

京大工　正　丹羽義次　小林昭一　○福井卓雄

この十年間に Cosserat surface の概念にもとづいたシェル理論が包括的な理論として，A.E. Green, P.M Naghdi 等によってまとめられてきた。[1] 最近の研究が示しているように，Sandwich shell,[2),(3] 厚肉シェル[4] なども Cosserat surface として表現することができ，また，従来の概念によるシェル構造ばかりでなく，曲面格子構造，曲面立体トラス，補剛シェル などの，より一般的な曲面構造に対しても，Cosserat surface の概念が有効になると思われる。本報では Naghdi により与えられた線形シェル理論に対し，その境界値問題の解の積分表示式を導く。このような積分表示式は，これより直接に導かれる積分方程式によって数値解析へ応用できるばかりでなく，各種の特異点近傍の解の挙動を把握するためにも重要な手がかりを与えるものである。



<u>Cosserat surface</u>　三次元 Euclid 空間の中の曲面 $\mathcal{S}$ を考える。曲面 $\mathcal{S}$ が変形して別の曲面 s へ移ったとすると，$\mathcal{S}$ 上の点 $\underset{\sim}{R}$ は s 上の点 $\underset{\sim}{r}$ へ移る。通常のシェル理論では，物体は曲面のまわりに三次元的な広がりを持っていると考え，$\mathcal{S}$ の近くの点 $\underset{\sim}{R}'$ は s の近くの点 $\underset{\sim}{r}'$ へ移るとする。その際に Kirchhoff-Love の仮定もしくはそれを若干拡張した仮定を用いて，$\underset{\sim}{R}'$ の $\underset{\sim}{r}'$ に移る関係を拘束する　すなわち，三次元体を幾何学的性質を考慮したある拘束のもとに別の三次元体に移し，結果を二次元的にとらえなおす方法を取る。一方，Cosserat surface においては，曲面 $\mathcal{S}$ は二次元多様体として，そのまま三次元空間内の別の二次元多様体（曲面 s）に移す。（変位 $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{r} - \underset{\sim}{R}$）　さらにその上に，$\mathcal{S}$ の各点にそれぞれ director と呼ばれる面ベクトル場 $\underset{\sim}{D}$ を考え，変形によって，変位 $\underset{\sim}{u}$ とはまったく独立に s 上の面ベクトル場 $\underset{\sim}{d}$ に移ると考える。（変位 $\underset{\sim}{\delta} = \underset{\sim}{d} - \underset{\sim}{D}$）　つまり，Cosserat surface は厚みのある三次元体を最初から厚さのない曲面として二次元的に取り扱うかわりに，厚みの効果を表現するものとして director を導入したものである。その結果，三次元体を幾何学的拘束を考慮しながら取り扱うという解析上の煩雑さを避け得たのみならず，director の変形の独立性を考慮することによって Kirchhoff-Love の仮定よりもはるかに大きな自由度を有する二次元連続体となっている。

<u>線形弾性シェルの基礎式</u>　Naghdi[1] に従って，Cosserat surface から導かれた，厚さ一定，等方均質の場合の線形弾性シェルの基礎式を示す。以下ではローマ字添字は 1, 2, 3 の値を，ギリシャ字添字は 1, 2 の値を取るものとする。$A_{\alpha\beta}$ $B_{\alpha\beta}$ は，曲面 $\mathcal{S}$ 上の曲線座標系 (x^1, x^2) に対する metric tensor および曲率 tensor である。また式を簡潔にするために，次の微分記号 $\|_i$ を用いる，即ち，空間ベクトル $\underset{\sim}{u} = u^\alpha \underset{\sim}{A}_\alpha + u^3 \underset{\sim}{A}_3$, $(|\underset{\sim}{A}_3| = 1)$，$A_{\alpha\beta}$ に対する共変微分 $|_\alpha$ について

$$u^\alpha \|_\beta = u^\alpha |_\beta - B^\alpha_\beta u^3 \ , \quad u^3 \|_\beta = u^3{}_{,\beta} + B^\alpha_\beta u_\alpha \ , \quad u^i \|_3 = 0 .$$

運動方程式　$N^{\alpha i}\|_{\alpha} + \rho F^i = \rho \ddot{u}^i$,　$M^{\alpha i}\|_{\alpha} + \rho L^i - m^i = \alpha\rho\ddot{\delta}^i$,　$\varepsilon_{\alpha\beta}(N^{\alpha\beta} - B^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma\beta}) = 0$.

ひずみ－変位関係式　$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha}\|_{\beta} + u_{\beta}\|_{\alpha})$,　$\gamma_i = \delta_i + u_3\|_i$,　$\rho_{i\alpha} = \delta_i|_{\alpha} - B^{\gamma}_{\alpha}u_{\gamma}\|_i$

構成関係式　$N'^{\alpha\beta} = N'^{\beta\alpha} = \rho(\partial\bar{\Phi}/\partial e_{\alpha\beta})$,　$M^{\alpha i} = \rho(\partial\bar{\Phi}/\partial\rho_{i\alpha})$,　$V^i = \rho(\partial\bar{\Phi}/\partial\gamma_i)$

ここに

$$2\rho\bar{\Phi} = [\alpha_1 A^{\alpha\beta}A^{\gamma\delta} + \alpha_2(A^{\alpha\gamma}A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta}A^{\beta\gamma})]e_{\alpha\beta}e_{\delta\gamma} + \alpha_3 A^{\alpha\gamma}\gamma_{\alpha}\gamma_{\gamma} + \alpha_4(\gamma_3)^2 + (\alpha_5 A^{\alpha\beta}A^{\gamma\delta} + \alpha_6 A^{\alpha\gamma}A^{\beta\delta} + \alpha_7 A^{\alpha\delta}A^{\beta\gamma})\rho_{\alpha\beta}\rho_{\delta\gamma} + \alpha_8 A^{\alpha\gamma}\rho_{3\alpha}\rho_{3\gamma} + 2\alpha_9 A^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}\gamma_3$$

$N'^{\alpha\beta}$, V^i と運動方程式に表われる量の関係は

$$N^{\alpha\beta} = N'^{\alpha\beta} - B^{\beta}_{\gamma}M^{\gamma\alpha} ,\quad N^{\alpha3} = V^{\alpha} ,\quad m^{\alpha} = V^{\alpha} - B^{\alpha}_{\gamma}M^{\gamma3} ,\quad m^3 = V^3 + B_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}$$

境界値問題および解の積分表示式

運動方程式を変位 u_i, δ_i で表わすと、運動方程式の第三式は自然に満足される。動的な場合にはLaplace変換を取って考えることにすれば、[5] 曲面 $\mathcal{S}$ 上の領域 $\mathcal{D}+\partial\mathcal{D}$ における境界値問題は次のように書ける。ただし、A^{ij} 等は微分作用素である。

領域 $\mathcal{D}$ で

$$\begin{Vmatrix} A^{ij} & B^{ij} \\ C^{ij} & D^{ij} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u_j \\ \delta_j \end{Vmatrix} = -\rho \begin{Vmatrix} F^i \\ L^i \end{Vmatrix}$$

境界 $\partial\mathcal{D}_1$ 上で　u_i, δ_i が与えられる。

境界 $\partial\mathcal{D}_2$ 上で　N^i, M^i が与えられる。

ここに

$$\begin{Vmatrix} N^i \\ M^i \end{Vmatrix} \equiv \nu_{\alpha} \begin{Vmatrix} N^{\alpha i} \\ M^{\alpha i} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} N^{ij} & H^{ij} \\ M^{ij} & K^{ij} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u_j \\ \delta_j \end{Vmatrix}$$

ν_{α} は境界 $\partial\mathcal{D}$ 上での単位法線ベクトル。

線形弾性論の場合と同様に、領域 $\mathcal{D}+\partial\mathcal{D}$ における二つの系 (u_i, δ_i), $(\bar{u}_i, \bar{\delta}_i)$ について、次の相反関係が成立する。

$$\int_{\partial\mathcal{D}}(N^i\bar{u}_i + M^i\bar{\delta}_i)ds + \int_{\mathcal{D}}\rho(F^i\bar{u}_i + L^i\bar{\delta}_i)d\Sigma = \int_{\partial\mathcal{D}}(\bar{N}^i u_i + \bar{M}^i\delta_i)ds + \int_{\mathcal{D}}\rho(\bar{F}^i u_i + \bar{L}^i\delta_i)d\Sigma$$

与えられた曲面 $\mathcal{S}$ を含む曲面 $\mathcal{S}'$ において、基本特異解を次の様に定義する。

$$\begin{Vmatrix} A^{ij} & B^{ij} \\ C^{ij} & D^{ij} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \Gamma_{jk}(x;y) & \Delta_{jk}(x;y) \\ \Psi_{jk}(x;y) & \Phi_{jk}(x;y) \end{Vmatrix} = -\begin{Vmatrix} \delta^i_k\,\delta(x-y) & 0 \\ 0 & \delta^i_k\,\delta(x-y) \end{Vmatrix} \quad x, y \in \mathcal{S}',\quad u_i = \delta_i = 0 \ \text{on}\ \partial\mathcal{S}'$$

このとき、領域 $\mathcal{D}+\partial\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ における境界値問題の解の積分表示式は次の様になる。

$$\begin{Vmatrix} u_k(y) \\ \delta_k(y) \end{Vmatrix} = \int_{\mathcal{D}} \begin{Vmatrix} \Gamma_{ik}(x;y) & \Delta_{ik}(x;y) \\ \Psi_{ik}(x;y) & \Phi_{ik}(x;y) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \rho F^i(x) \\ \rho L^i(x) \end{Vmatrix} d\Sigma_x + \int_{\partial\mathcal{D}} \left[\begin{Vmatrix} \Gamma_{ik}(x;y) & \Delta_{ik}(x;y) \\ \Psi_{ik}(x;y) & \Phi_{ik}(x;y) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} N^i(x) \\ M^i(x) \end{Vmatrix} - \left\{ \begin{Vmatrix} N^{ij} & H^{ij} \\ M^{ij} & K^{ij} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \Gamma_{ik}(x;y) & \Delta_{ik}(x;y) \\ \Psi_{ik}(x;y) & \Phi_{ik}(x;y) \end{Vmatrix}^{T} \right\}^{T} \begin{Vmatrix} u_i(x) \\ \delta_i(x) \end{Vmatrix} \right] ds_x$$

積分表示式を用いて、与えられた境界値問題に対する積分方程式は容易に得られる。問題は基本特異解を求めることであるが、一般のシェルを解析的に取り扱うことは非常に困難であり、事実、ごく限られた特殊な形状のシェルを除いては閉じた形での基本特異解は知られていない。[6),(7),(8] 基本解の特異点近傍での挙動ならびに実用的な基本特異解の計算法についての考察は当日発表する。

(1) Naghdi, P.M., The Theory of Shells and Plates, "Handbuch der Physik" VIa/2, 1972.

(2) Malcolm, D.J. & P.G. Glockner, J. Eng. Mech Div. ASCE 98, p 1075, 1972

(3) Malcolm, D.J. & P.G. Glockner, J. Eng. Mech. Div. ASCE 98, p 1183, 1972

(4) Bercha, F.G. & P.G. Glockner, J. Eng. Mech. Div. ASCE 98, p. 833, 1972

(5) 小林昭一, S49関西支部年次学術講演会, I-7, 1974.

(6) Sanders, J.L., Jr. J. Appl. Mech. 37, pp. 361-366, 1970.

(7) Sanders, J.L., Jr. & Simmonds, J.G. J. Appl Mech. 37 pp 367-373, 1970.

(8) Sanders, J.L., Jr. J. Appl Mech 37, pp 374-383, 1970

(シェルの特異解に関する文献を多く挙げている)。