

積分方程式による非均質物体内の過渡応力集中の解析

京都大学工学部 正員 丹羽義次 同 正員 小林昭一
 京都大学工学部 正員 福井卓雄 同 正員 東 恵昭

1. はじめに 地盤や岩盤中に建設された構造物周辺の応力解析は、近似的に、無限弾性体中に異質の弾性体が存在する非均質物体の応力解析とみなすことができる。このような問題の過渡応力集中の解析については、いくつかの方法があるが、ここでは進行波を近似的に調和波の重ね合わせとして表わし、各々の調和波による解を重ね合わせることによって、進行波による解を得るという方法を用いた。なお、調和波による解析には、弾性学の境界値問題を積分方程式に帰着させる方法を用いた。この積分方程式による解法は、任意形状のインクルージョンが存在する場合の問題に適用することができるといえる。

2. 弾性問題の基礎方程式 等方、均質な完全弾性体の調和な定常状態における基礎方程式は、直交直線座標を用いると次のように与えられる。

$$(C_1^2 - C_2^2) u_{ijji} + C_2^2 u_{ijjj} + \omega^2 u_i = -f_i/\rho$$

ここに、 u_i , f_i は変位ベクトル、物体力ベクトルの各成分、 λ , μ は Lamé の定数、 ρ は密度を表わし、 $C_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $C_2^2 = \mu/\rho$ である。また、 ω は円振動数である。物体力を考えなくてもよい場合には次のようになる。

$$(C_1^2 - C_2^2) u_{ijji} + C_2^2 u_{ijjj} + \omega^2 u_i = 0 \quad (1)$$

3. 基本特異解 無限弾性体のある1点 x の j 方向に単位の集中力が作用した時の任意点 x における i 方向の変位を $\tilde{r}_{ij}^{(j)}(x; z)$ と表わし、これを第1種の基本特異解という。一方、応力に相当する $\tilde{\sigma}_{ij}^{(j)}(x; z) = \pi_{ijl}^{(j)} \tilde{r}_{lj}^{(j)}(x; z)$ によって、次のように表わされるものを、第2種の基本特異解という。 $\tilde{r}_{ij}^{(j)}(x; z) = \tilde{r}_{ji}^{(i)}(z; x) = \pi_{jil}^{(i)} \tilde{r}_{lj}^{(i)}(z; x)$, ここに、 $\pi_{jil}^{(i)} = \mu \left[\delta_{ij} \frac{\partial}{\partial n} + n_i \partial_j + n_j \partial_i \right]$, $\frac{\partial}{\partial n}$ は法線微分、 n_i は法線ベクトルの i 方向成分である。基礎方程式(1)に関する基本特異解は次のようである。

$$\tilde{r}_{ij}^{(j)}(x; z) = A(\psi \delta_{ij} - \chi r_i r_j), \quad \tilde{r}_{ij}^{(i)}(z; x) = \mu A \left\{ \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_j n_i + \frac{\lambda}{\mu} r_j r_i \right\} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \left\{ \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_j n_i \right\} + 2(r_j r_i - 2r_i r_j \frac{\partial}{\partial n}) + \frac{\lambda}{\mu} n_j r_i \frac{\partial \chi}{\partial r} - \left\{ 2r_j r_i \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\lambda}{\mu} r_i n_j \right\} \frac{\partial \chi}{\partial r}$$

ここに、 $r = \sqrt{(x_i - z_i)(x_i - z_i)}$, $\psi = H_0^{(1)}(\xi_2 r) - \frac{1}{\xi_1 r} H_1^{(1)}(\xi_2 r) + \frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{1}{\xi_1 r} H_1^{(1)}(\xi_1 r)$, $\chi = -H_2^{(1)}(\xi_2 r) + \frac{\xi_1}{\xi_2} H_2^{(1)}(\xi_1 r)$, $\xi_1 = \omega/C_1$, $\xi_2 = \omega/C_2$, $H_n^{(1)}$ は第1種 n 次の Hankel 関数である。

4. 積分方程式の構成 場の方程式を $u_{ijji} = 0$ とすると、相反定理により、次のような Betti の式を得ることができる。

$$\int_V \{ u_{ij}^{(1)} u_{ji}^{(2)} - u_{ji}^{(1)} u_{ij}^{(2)} \} dV = \int_S \{ \pi_{ijl}^{(1)} u_{lj}^{(2)} - u_{ij}^{(1)} \pi_{jil}^{(2)} \} dS$$

ここに、 $u_{ij}^{(1)}$, $u_{ij}^{(2)}$ は異なる2つの状態の関数で、 V は領域、 S は境界を表わす。この式において、 $u_{ij}^{(1)}$ に第1種基本特異解、 $u_{ij}^{(2)}$ に式(1)を満足する関数 u_i を代入すると、次のような Somigliana の積分公式が導かれる。

$$F(x) u_i(x) = \int_S \{ \tilde{r}_{ij}^{(1)}(x; z) \pi_{jil}^{(1)}(z; z) - \tilde{r}_{ij}^{(1)}(x; z) u_i(z) \} dS; \quad z \in S, x \in V \quad (2)$$

ここに、 $F(x)$ は、点 x が領域の内部、境界上、外部にあるとき、それぞれ1, $1/2$, 0

である。ここで、領域の境界条件を満足するように、実境界あるいは仮想境界上に、 $\pi \tilde{u}_j(x)$ および $u_j(x)$ を分布させれば、内部の点における $u_j(x)$ が求められる。したがって、上の境界値問題は、 S (実境界あるいは仮想境界) 上の密度 $\pi \tilde{u}_j(x)$ および $u_j(x)$ を求める積分方程式に帰着される。

5. 無限弾性体中にインクルージョンが存在する境界値問題の解法 まず、外部領域と内部領域(インクルージョン)に分け、両者の剛性マトリクスをそれぞれ作る。次に、境界上で応力および変位の連続条件を満たすように、境界上の変位を求める。この変位を用いて、両者の領域内および境界上の応力および変位が求められる。

6. 数値計算例 円柱および円筒インクルージョンが存在する場合について、階段波の進行に伴う過渡応力状態を、Fig. 1 (円柱インクルージョン)、Fig. 2 (円筒インクルージョン)に示した。また、円柱インクルージョンが存在する場合の円形境界上のA点(Fig. 1に示す)のフープストレスの変化をFig. 3に示した。なお、詳しい結果については当日スライドで説明する。

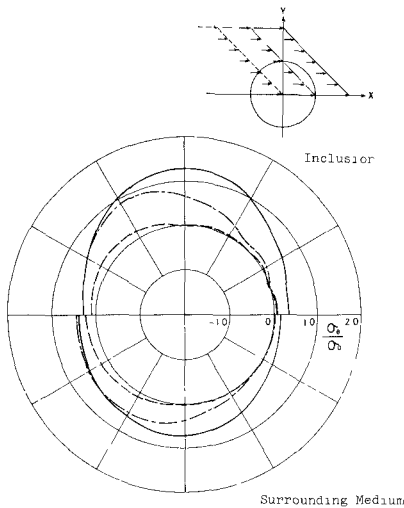


Fig. 1 Stress Distribution

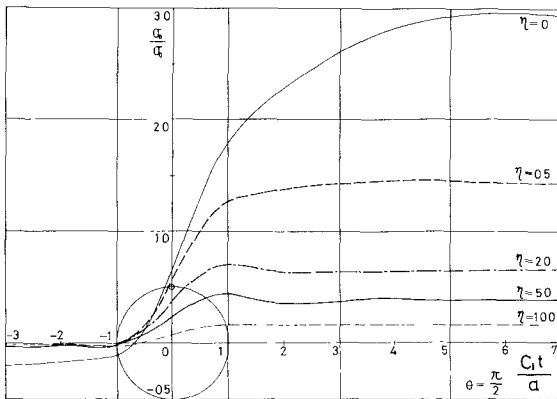


Fig. 3 Stress Variation During The Passage Of Traveling Waves

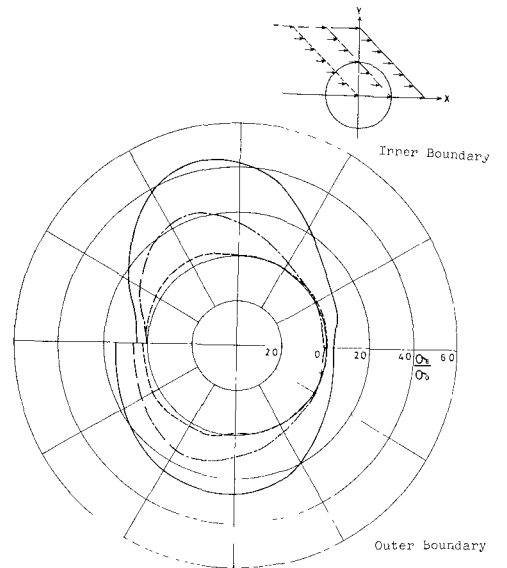


Fig. 2 Stress Distribution Cylindrical Inclusion

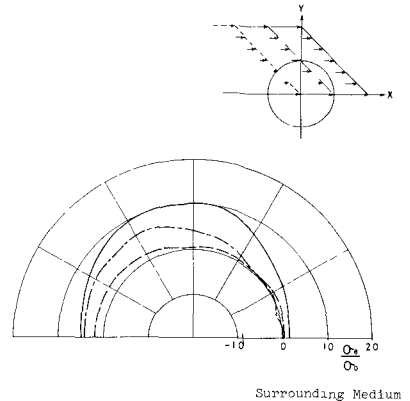


Fig. 2 Stress Distribution