待ち行列理論による機械系選定情報の作成

京都大学工学部　正員　吉川和広
京都大学工学部　正員○山本幸司
京都大学大学院　学生員　長尾正平

1. はじめに　土木施工分野においては，土工機械系の稼働状況のように，投入資源量が有限であり，かつそれらがサイクリックな作業工程を呈するため，サイクルキューのシステムとしてモデル化できる現象が多い。本研究は，土工機械系選定情報の作成を目的として２段のサイクルキュー（特にアーランサービス）の解析を試みるものである。

2. サイクルキューモデルのパターン　サービス方法を指数サービスとアーランサービスに限定すれば，２段のサイクルキューモデルは表－１に示す９つのパターンに分類できる。このうち，指数サービスに関しては，パターン８についてKoenigsbergが機械干渉問題として解析しており，[1] また米谷・河上は個々のサービス能力が異なる場合を解析している。[2] つぎにアーランサービスに関しては，その位相が問題となるため，従来，研究が少なく，竹内は $S \ll k$ という特殊なモデルに対してKoenigsbergの方法を準用し解析を試みている。[3] 本研究はパターン１から８までを包括しうるパターン９に関する解析を行なう。

3. $(E_{k_1}/S_1+E_{k_2}/S_2)$ モデルの定式化および解析　パターン９の各状態を記述するためには，単に各ステージの窓口占有数だけでなく，それらが占有している位相をも明確に記述しなければならない。そのため，状態確率としては $P(n_1, n_2; a_1^1, \cdots a_i^1 \cdots a_{k_1}^1; a_1^2, \cdots a_j^2 \cdots a_{k_2}^2; t)$ という形を考える必要がある。ここに，n_1；時刻 t においてステージ１にいる客数，n_2；同じくステージ２にいる客数，a_i^1；時刻 t においてステージ１の位相 i を占有している客数，a_j^2；同じくステージ２の位相 j を占有している客数を示す．また，

$$n_1+n_2=N,\quad \sum_{i=1}^{k_1} a_i^1 \leqq S_1,\quad \sum_{j=1}^{k_2} a_j^2 \leqq S_2 \qquad (1)$$

である．さて，状態確率 P の定義から明らかなように $(E_{k_1}/S_1+E_{k_2}/S_2)$ モデルでは k_1, k_2, N の大きさによって状態確率変数 P の数が指数的にふえるため，ここでは $k_1=2$, $k_2=2$, $S_1=3$, $S_2=2$, $N=3$ という簡単な例によってその解析方法を考えていくことにする。

いま，客がステージ１に n_1，ステージ２に n_2 いる状態を (n_1, n_2) で表わせば，$(0,3)$ の時，

$$P(0,3;0,0;2,0:t+\Delta t)=P(0,3;0,0;2,0:t)(1-2k_2\mu_2\Delta t)+P(1,2;0,1;2,0;t)k_1\mu_1\Delta t(1-2k_2\mu_2\Delta t) \qquad (2)$$

ここで，$\rho=k_1\mu_1/k_2\mu_2$ とおくと定常状態では，

$$-2P(0,3;0,0;2,0)+\rho P(1,2;0,1;2,0)=0 \qquad (3)$$

さらに，$a_1^2=1$ および $a_1^2=0$ の場合についても

$$-2P(0,3;0,0;1,1)+2P(0,3;0,0;2,0)+\rho P(1,2;0,1;1,1)=0 \qquad (4)$$

$$-2P(0,3;0,0;0,2)+P(0,3;0,0;1,1)+\rho P(1,2;0,1;0,2)=0 \qquad (5)$$

という４個の状態方程式が得られ，以下同様に，(1,2) の時は６個，(2,1) では６個，(3,0) では４個，合計19個の状態方程式が得られる。しかしこれらのうち任意の１式は他の式によって表わされるため独立な式は18個であるが，いま

$$P(n_1, n_2; t)=\sum_{a_i^1, a_j^2} P(n_1, n_2; a_1^1 \cdots a_i^1 \cdots a_{k_1}^1; a_1^2 \cdots a_j^2 \cdots a_{k_2}^2; t) \qquad (6)$$

表－１　２段のサイクルキューのパターン

パターンの番号＼パターンの内容	ステージ１		ステージ２	
	サービス方法	窓口数	サービス方法	窓口数
1	M_1	1	M_2	1
2	M_1	1	E_{k_2}	1
3	E_{k_1}	1	E_{k_2}	1
4	M_1	S_1	M_2	1
5	M_1	S_1	E_{k_2}	1
6	E_{k_1}	S_1	M_2	1
7	E_{k_1}	S_1	E_{k_2}	1
8	M_1	S_1	M_2	S_2
9	E_{k_1}	S_1	E_{k_2}	S_2

とおけば，状態確率の性質より，　$\sum_{n_1,n_2} P(n_1, n_2 ; t) = 1$ ―――――――――――― (7)

が成立するため独立な方程式の数は19個となる。一方，各状態確率変数を未知数と考えればやはり19個であるため，連立一次方程式としての解析が可能となる。Sweep-out法による計算結果を，$(M_1/S_1 + M_2/S_2)$ モデルの結果と比較して示したのが表-2である。

表-2　簡単なモデルによる計算例
$\left(\begin{array}{l} \mu_1 = 0.055,\ k_1 = 2,\ S_1 = 3,\ N = 3 \\ \mu_2 = 0.500,\ k_2 = 2,\ S_2 = 2, \end{array}\right)$

状態確率 ＼ モデルパターン	$E_{k_1}/S_1 + E_{k_2}/S_2$	$M_1/S_1 + M_2/S_2$
P(0,3)	0.064940	0.077069
P(1,2)	0.269472	0.256898
P(2,1)	0.431825	0.428163
P(3,0)	0.233763	0.237868

4. サイクルキューの平均待ち時間

サイクルキューモデルに対しても平均待ち行列長 L_q については，

ステージ1の平均待ち行列長 $L_q^1 = \sum_{n_1=1}^{N} n_1 P(n_1, n_2)$ ―――――― (8)

のように簡単に算定できる。しかし，平均待ち時間 W_q に関しては，一般的な $W_q = L_q/\lambda$ 式を適用しようとしても平均到着率 λ を直接算定することが困難である。そこで，以下ではサイクルキューモデルの平均待ち時間の算定方法を検討する。いま，$(M_1/1 + M_2/S_2)$ モデルにおいてステージ1に n_1 の客がいるとき，それぞれの客は平均 $1/\mu_1$，位相 n_1 のアーランサービスを受けていると考えられる。ここで，$P^*(n_1)$ によってステージ1に1つの客が到着する直前に行列中（サービス中を含む）に n_1 の客がいるという確率を示すことにすれば，待ち時間の分布関数 $w(x)$ および平均待ち時間 W_q は次のように表わされる。

$$w(x) = \sum_{n_1=0}^{N-1} P^*(n_1) \int_0^x \frac{\mu_1^{n_1} t^{n_1-1}}{(n_1-1)!} e^{-\mu_1 t} dt \quad \text{―――――――――――――――― (9)}$$

$$\begin{aligned} W_q &= \int_0^\infty x\, dw(x) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \int_0^\infty P^*(n_1) \frac{(\mu_1 x)^{n_1}}{(n_1-1)!} e^{-\mu_1 x} dx = \sum_{n_1=0}^{N-1} P^*(n_1) \int_0^\infty \frac{(\mu_1 x)^{n_1}}{(n_1-1)!} e^{-\mu_1 x} dx \\ &= \sum_{n_1=0}^{N-1} P^*(n_1) \frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{1}{(n_1-1)!} \int_0^\infty y^{n_1} e^{-y} dy = \sum_{n_1=0}^{N-1} P^*(n_1) \frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{1}{(n_1-1)!} \Gamma(n_1+1) = \sum_{n_1=0}^{N-1} P^*(n_1) \frac{n_1}{\mu_1} \end{aligned} \quad \text{―――――― (10)}$$

さて，$(N, 0)$ という状態では明らかに $P^*(N) = 0$ であるが，一般には $P(N,0) \neq 0$ であるため $P^*(n_1) \neq P(n_1, n_2)$ となる。そこで以下では，まず $P^*(n_1)$ と $P(n_1, n_2)$ との関係を求めることにする。いま定常状態の任意の時刻 t におけるステージ1の客数を $Q(t)$，Δt 後のそれを $Q(t+\Delta t)$ とすれば，時刻 t に n_1，Δt 後に n_1+1 という確率は式(11)あるいは式(12)で表わされる。

$$P_r\{Q(t)=n_1, Q(t+\Delta t)=n_1+1\} = P_r\{Q(t)=n_1\} \cdot P_r\{Q(t+\Delta t)=n_1+1 \mid Q(t)=n_1\} = P(n_1, n_2)\mu_2 \Delta t,\ \text{ここに}\ n_2 = N - n_1 \quad \text{―― (11)}$$

$$\begin{aligned} &P_r\{Q(t)=n_1, Q(t+\Delta t)=n_1+1\} = P_r\{Q(t+\Delta t)=Q(t)+1\} \cdot P_r\{Q(t)=n_1 \mid Q(t+\Delta t)=Q(t)+1\} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left[P_r\{Q(t+\Delta t)=j+1 \mid Q(t)=j\} \cdot P_r\{Q(t)=j\} \right] \cdot P^*(n_1) = P^*(n_1) \sum_{j=0}^{N-1} P(j, N-j)\mu_2 \Delta t \end{aligned} \quad \text{―――――― (12)}$$

ここで，式(11)，式(12)が等しいことから，　$P^*(n_1) = P(n_1, n_2) \Big/ \sum_{j=0}^{N-1} P(j, N-j)$ ―――――― (13)

が得られ，これを式(10)へ代入すれば，　$W_q = (1/\mu_1)\{(L_q - NP(N,0)/1 - P(N,0)\}$ ―――― (14)

となる。したがって $P(N,0)$ の値が極めて小さければ，式(14)は $W_q = L_q/\mu_1$ 式で近似できる。

5. おわりに

本研究は機械系施工情報の作成を前提として，$(E_{k_1}/S_1 + E_{k_2}/S_2)$ モデルの解析を試みたものであり，1つの解析方法を示すことができた。今後の課題としては，①位相 k や窓口数 S，投入資源量 N がさらに増大しても，電算機の容量制限から計算可能か，② $(M_1/1 + M_2/S_2)$ モデルに関しては平均待ち時間を算定することができるが，$(E_{k_1}/S_1 + E_{k_2}/S_2)$ モデルではどうなるか，などが考えられるため，現実の機械化土工への適用を考えている。

1) Koenigsberg, E.; Finite Queues and Cyclic Queues, Operations Research, Vol.8, pp.246～253, 1960

2) 米谷栄二・河上省吾；しゅんせつ工事計画に関する一考察，土木学会論文報告集，第125号，pp.1～11，1966

3) 竹内義雄；サイクルキューモデルによるしゅんせつ船団計画に関する研究，土木学会論文報告集，第140号，pp13～20，1967