道路網の容量について

京都大学　正員　井上博司

1．まえがき

道路網をリンクとノードの集合よりなるネットワークと考え，そこに一定のOD交通量構成比でフローを流すとき，最大限どれだけのフローを流すことができるかということについて，これまで2，3の研究結果が報告されている。それらはいずれもリンクにフローの上限値を設定したものであり，西村の方法[1]では，カット法によって最大フローの上限値を，最短路配分法によって下限値を求めることができるとされている。真の最大フローはこの上，下限値の間にあり，それは線形計画法によって求めうることが三好，山村[2]によって示されている。一方，分割配分法によって除々にOD交通量を増加させながら最大フローを求めるという方法が飯田[3]によって提案されている。

リンクにフローの上限値を設定して最大フローを求めることは，ネットワーク理論との関連において非常に興味深いものがあるが，実際の交通現象としては，道路区間よりはむしろ道路の結節点が隘路となっていることが多い。したがって道路網の容量としては，各道路区間における交通容量とともに，道路の結節点における交通処理能力を考慮しなければならない。ここではリンクとノードにフローの上限値を設定したネットワークにおいて，一定のOD交通量構成比で流しうる最大トリップ数を道路網の容量と考え，それを一般カットによって表現することを試みる。

2．最大トリップ数の一般カットによる表現

いま総トリップ数をT，iというODペアーに関するOD交通量の総トリップ数に対する比率をφ^i，ODペアーiの起終点間をkという経路に沿って流れる交通量をx_k^iとする。またjという道路区間の許容される交通量の上限をC_j，nという交差点の許容される通過交通量の上限をD_nとする。さらにr_{kj}^i，δ_{nj}を次のように定める。

$$r_{kj}^i = \begin{cases} 1; & \text{OD } i \text{ の経路 } k \text{ が道路区間 } j \text{ を経由するとき。} \\ 0; & \text{OD } i \text{ の経路 } k \text{ が道路区間 } j \text{ を経由しないとき。} \end{cases}$$

$$\delta_{nj} = \begin{cases} 1; & \text{交差点 } n \text{ が道路区間 } j \text{ に連結しているとき。} \\ 0; & \text{交差点 } n \text{ が道路区間 } j \text{ に連結していないとき。} \end{cases}$$

このとき，次の式(1)～(4)が成りたたなければならない。

$$\sum_k x_k^i = T\varphi^i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots) \qquad (1)$$

$$\sum_i\sum_k r_{kj}^i x_k^i \leqq C_j \qquad (j=1,2,\cdots\cdots) \qquad (2)$$

$$\sum_j \delta_{nj}\sum_i\sum_k r_{kj}^i x_k^i \leqq D_n \qquad (n=1,2,\cdots\cdots) \qquad (3)$$

$$x_k^i \geqq 0,\quad T \geqq 0 \qquad (i=1,2,\cdots\cdots)\ (k=1,2,\cdots\cdots) \qquad (4)$$

道路網における最大トリップ数は，制約条件(1)～(4)のもとで，目標関数 $T \to max$

とする線形計画問題を解くことによって得られる。シンプレックス法によってこの問題の解は容易に求められるが，ここでは最大トリップ数を一般カットによって表現するために上記の線形計画の双対問題を考えよう。式 (3) において，

$$\delta^i_{kn} = \sum_j \delta_{nj} \gamma^i_{kj} \qquad (5)$$

とおくと，式 (3) は次のように書き換えられる。

$$\sum_i \sum_k \delta^i_{kn} x^i_k \leqq D_n \qquad (6)$$

いま双対変数を γ^i $(i=1,2,\cdots)$，$u_j \geqq 0$ $(j=1,2,\cdots)$，$v_n \geqq 0$ $(n=1,2,\cdots)$ とすると，双対問題は制約条件

$$-\gamma^i + \sum_j \gamma^i_{kj} u_j + \sum_n \delta^i_{kn} v_n \geqq 0 \quad (i=1,2,\cdots)(k=1,2,\cdots) \qquad (7)$$

$$\sum_i \varphi^i \gamma^i \geqq 1 \qquad (8)$$

$$u_j \geqq 0 \ , \ v_n \geqq 0 \quad (j=1,2,\cdots),(n=1,2,\cdots) \qquad (9)$$

のもとで，次の目標関数を最小にする問題となる。

$$\phi_1 = \sum_j C_j u_j + \sum_n D_n v_n \qquad (10)$$

ここで γ^i_* を

$$\gamma^i_* = \min_k \left(\sum_j \gamma^i_{kj} u_j + \sum_n \delta^i_{kn} v_n \right) \qquad (11)$$

とおくと，制約条件 (7), (8) および目標関数 (10) の斉次性より，目標関数の最小化は $\sum_i \varphi^i \gamma^i_* = 1$ において実現されることがわかる。次に目標関数の最小値は，

$$\phi_2 = \frac{\sum_j C_j u_j + \sum_n D_n v_n}{\sum_i \varphi^i \gamma^i_*} \quad (u_j \geqq 0,\ v_n \geqq 0) \qquad (12)$$

の最小値に一致することを示そう。ϕ_1 の最小点を u_j, v_n, γ^{i*}_*，ϕ_2 の最小点を u^o_j, v^o_n, γ^{io}_* とすると，u_j, v_n, γ^i_* の斉次性より，$\sum_i \varphi^i \gamma^{io}_* = 1$ とすることができる。したがってもし，$\min \phi_1 < \min \phi_2$ であるなら，$\phi_2 |_{u_j = u^*_j, v_n = v^*_n, \gamma^i_* = \gamma^{i*}_*} < \min \phi_2$ となって，u^o_j, v^o_n, γ^{io}_* が ϕ_2 の最小点であることに反する。同様に $\min \phi_1 > \min \phi_2$ であるなら，u^*_j, v^*_n, γ^{i*}_* が ϕ_1 の最小点であることに反する。したがって $\min \phi_1 = \min \phi_2$ である。双対定理よりこれは主問題における目標関数の最大値に一致するから，次式をうる。

$$\max T = \min_{\substack{u_j \geqq 0 \\ v_n \geqq 0}} \frac{\sum_j C_j u_j + \sum_n D_n v_n}{\sum_i \varphi^i \gamma^i_*} \qquad (13)$$

3．あとがき

リンクおよびノードにフローの上限値を設定したときにおける最大フローは，一般カットによって式 (13) のように表現されるが，この表現自体は最大フローを求めることにあまり役に立たない。最大フローを求めるためには上記の線形計画を解くかあるいは別のアルゴリズムを考えなければならないであろう。以上は流れ方に何ら制約を与えない場合であるが，特に等時間原則にしたがう流れにおける最大フローというものを考えてみても，等時間原則を Jørgensen の目標関数最小化と考える限り，走行時間関数の設定の仕方によって微妙な相異はあるが，最大フローにおいて目標関数が最小化されるにすぎないから，流れ方に制約を与えない場合の最大フローと一致することは自明である。

〈参考文献〉
1) 西村昴；道路網の最大フローの存在範囲について，2) 三好，山村；道路網における最大総トリップ数について，第31回土木学会年次講演概要，3) 飯田；道路網の最大容量の評価法，土木学会論文集 205号