モーダルスプリットの一手法

京都大学工学部　正員　福山正治

1．まえがき

従来モーダルスプリットは，二者択一の方法が中心であった。しかし，モーダルスプリットが種々の交通機関の混在する都市における総合交通計画への重要な役割を果している以上，多種の交通機関の競合状態を説明し得るモデルが必要とされる。本稿では，競合状態にある複数モードの分担率を同時に決定する回帰モデルを提案する。

2．モデル

手段 k $(k=1,2,\cdots,M)$ の分担率を p_k で表わす。p_k は，$p_k \geq 0$ $(k=1,2,\cdots,M)$ で次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{M} p_k = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

サフィクス l $(l=1,2,\cdots,L)$ で，所要時間，料金などの各要因を表わし，x_{kl} で手段 k，要因 l の値を表わす。今，x_{kl} の微小変化 Δx_{kl} に対する p_k の変化を $(\partial p_k/\partial x_{kl})\Delta x_{kl}$ で表わすと，p_k の変化 Δp_k は次式で表わすことができる。

$$\Delta p_k = \sum_{l=1}^{L}\sum_{s=1}^{M} \frac{\partial p_k}{\partial x_{sl}} \Delta x_{sl} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$(k=1,2,\cdots,M)$$

また，(1)式の条件より次式が導かれる。

$$\sum_{k=1}^{M} \Delta p_k = 0, \quad \sum_{s=1}^{M} \frac{\partial p_k}{\partial x_{sl}} = 0 \quad (l=1,2,\cdots,L) \cdots \cdots\cdots \quad (3)$$

(2)式は，p_k を x_{sl} $(s=1,2,\cdots,M,\ l=1,2,\cdots,L)$ の関数と考えた場合の全微分の式である。一般に，$\partial p_k/\partial x_{sl}$ は，すべての k，s，l について異なり，また，x_{sl} の関数であると考えられるが，$\partial p_k/\partial x_{sl}$ が x_{sl} に依存しない定数 y_{sl}^{k} であると仮定すると，(2)式は次のような線形式となる。

$$\mathbb{P} = \sum_{l=1}^{L} \mathbb{Y}_l \mathbb{X}_l + \mathbb{C} \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

ここに，$\mathbb{P}$，$\mathbb{Y}_l$，$\mathbb{X}_l$，$\mathbb{C}$ は以下に示す，マトリクス，またはベクトルである。

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_M \end{bmatrix}, \quad \mathbb{Y}_l = \begin{bmatrix} y_{1l}^1 & y_{2l}^1 & \cdots & y_{Ml}^1 \\ y_{1l}^2 & y_{2l}^2 & \cdots & y_{Ml}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1l}^M & y_{2l}^M & \cdots & y_{Ml}^M \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{X}_l = \begin{bmatrix} x_{1l} \\ x_{2l} \\ \vdots \\ x_{Ml} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_M \end{bmatrix}$$

(3)式の条件より次の関係が導かれる。

$$\mathbb{P}^T\mathbb{1} = 1, \quad \mathbb{Y}_l^T\mathbb{1} = \phi \quad (l=1,2,\cdots,L),$$
$$\mathbb{C}^T\mathbb{1} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

ただし，$\mathbb{1}$ および ϕ はそれぞれ要素がすべて1，または0の縦ベクトルで，大きさは演算に矛盾のないように取っておく。右肩のTは行列の転置を表わし，$\mathbb{C}$ は定数項に対応する。以下，(5)式を満すマトリクス $\mathbb{Y}_l$ $(l=1,2,\cdots,L)$，および $\mathbb{C}$ を回帰分析によって求めることを考える。各ODペア i $(i=1,2,\cdots,N)$ から得られる実測値を，$\mathbb{P}_i$，$\mathbb{X}_{li}$ で表わす。また，これらのベクトルの各要素を $\mathbb{P}_i^T=(p_{1i}, p_{2i} \cdots p_{Mi})$，$\mathbb{X}_{li}^T=(x_{1l}^i\ x_{2l}^i \cdots x_{Ml}^i)$ で表わし $\mathbb{P}_i$ に関しては各要素が正であることと，次式が成立する。

$$\mathbb{P}_i^T\mathbb{1} = 1 \quad (i=1,2,\cdots,N) \quad \cdots\cdots \quad (6)$$

まず，残差Eを

$$E = \sum_i \left(\mathbb{P}_i - \sum_{l=1}^{L}\mathbb{Y}_l\mathbb{X}_{li} - \mathbb{C}\right)^T \left(\mathbb{P}_i - \sum_{l=1}^{L}\mathbb{Y}_l\mathbb{X}_{li} - \mathbb{C}\right) \cdots (7)$$

と定義し，このEを最小とする $\mathbb{Y}_l$，$\mathbb{C}$ を求

める。 $\partial E/\partial y^{k}_{s\ell}=0$, $\partial E/\partial C_k=0$ ($k;S=1,2,\cdots,M$, $\ell=1,2,\cdots,L$) より次式が導かれる。

$$\mathbb{X}^T\mathbb{X}\,\mathbb{Y}^T=\mathbb{X}^T\mathbb{P} \qquad \cdots\cdots(8)$$

ただし、

$$\mathbb{X}=\begin{bmatrix} x_{11}^T & x_{21}^T & \cdots & x_{L1}^T & 1 \\ x_{12}^T & x_{22}^T & \cdots & x_{L2}^T & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{1N}^T & x_{2N}^T & \cdots & x_{LN}^T & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbb{P}=\begin{bmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ \vdots \\ p_N^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{Y}=[\,\mathbb{Y}_1\,\mathbb{Y}_2\cdots\cdots\mathbb{Y}_L\,\mathbb{C}\,]$$

また、$\mathbb{X}$の各要素を改めて x_{ij} ($i=1,2,\cdots N$, $j=1,2,\cdots,M\times L+1$) とする。 (8)式より

$$\mathbb{Y}^T=(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^T\mathbb{P} \qquad \cdots\cdots(9)$$

で$\mathbb{Y}$は求まる。 次に(9)式から求まった$\mathbb{Y}$が(5)式の条件を満すことを証明する。 まず$\mathbb{X}\mathbb{Y}^T\mathbb{1}$を求めると、(6)式の条件より次のようになる。

$$\mathbb{X}\mathbb{Y}^T\mathbb{1}=\mathbb{X}(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^T\mathbb{P}\mathbb{1}=\mathbb{X}(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^T\mathbb{1}$$

上式の両辺に$\mathbb{X}^T$を掛けることにより、

$$\mathbb{X}^T\mathbb{X}\,\mathbb{Y}^T\mathbb{1}=\mathbb{X}^T\mathbb{1} \qquad \cdots\cdots(10)$$

が求まる。 ところが$\mathbb{X}^T\mathbb{X}$の最後の列、すなわち、$t=M\times L-1$列の第j行は $(\mathbb{X}^T\mathbb{X})_{jt}=\sum_{i=1}^{N}x_{ij}$ となり、また右辺の$\mathbb{X}^T\mathbb{1}$の第j行もまた、$(\mathbb{X}^T\mathbb{1})_j=\sum_{i=1}^{N}x_{ij}$ となる。 このことは、ベクトル$\mathbb{Y}^T\mathbb{1}$の第t番目の要素のみ1で、残りのすべての要素が0であることを示す。 よって(5)式の条件が満されていることがわかる。

3. 要因を基準化して与える場合

各要因ℓに対し、$x'_{s\ell}=x_{s\ell}/\sum_{k=1}^{M}x_{k\ell}$ とおき

$$\sum_{s=1}^{M}x'_{s\ell}=1 \quad (\text{または } x_\ell'^T\mathbb{1}=1) \qquad \cdots(11)$$

となるように変換する。 ただし $x_\ell'^T=(x'_{1\ell}\ x'_{2\ell}\cdots x'_{M\ell})$である。 この変換をここでは基準化すると呼ぶことにし、基準化した後の変数は′を付けて表わすことにする。 この基準化を行うのは、分担率は各手段の要因そのままの値よりも、各手段相互の相対的な大きさに依存すると考えられるからである。 基準化を行った変数に対しても、前節と同様に(8)式を導けるが、 この場合の$\mathbb{X}'^T\mathbb{X}'$は、(11)式の条件のため、Lだけランクの落ちたものとなっている。 よって$\mathbb{Y}$は一意的には定まらない。 しかし、その中の任意の1つが定まれば、他の$\mathbb{Y}$はそれから導くことができる。 その任意の$\mathbb{Y}$を求めるには、$\mathbb{X}$から、各要因の中の1つの手段に対応する列を落として(8)式を作り、$\mathbb{Y}$からその落とした列に対応する列だけ取り除かれた$\mathbb{Y}'$の形で解を求め、次に$\mathbb{Y}'$を$\mathbb{Y}$に広げれば良い。 この時、落した列には0を入れる。 明らかに$\mathbb{Y}$は、どの手段に対応する列を落すかで異なってくる。 しかし、分担率の推定値は、列の落し方に依存せず一意的に定まる。

4. 計算例

k \ $s\ell$	基準化しない場合			基準化した場合		
	1	2	3	1	2	3
11	0.034	-0.013	-0.021	0.766	-0.163	-0.603
21	-0.011	0.005	0.006	-1.444	0.964	0.480
31	0.009	-0.008	-0.001	0.0	0.0	0.0
12	-0.002	-0.003	0.005	1.184	-1.690	0.506
22	-0.001	0.001	0.000	0.043	-0.108	0.065
32	-0.007	0.006	0.001	0.0	0.0	0.0
13	-0.017	0.014	0.003	-0.404	0.375	0.028
23	0.043	-0.038	-0.005	-0.302	0.292	0.009
33	0.030	-0.027	-0.003	0.0	0.0	0.0
14	0.171	-0.154	-0.017	1.006	-1.251	0.245
24	-0.030	0.032	-0.002	-0.025	-0.111	0.136
34	-0.041	0.050	-0.009	0.0	0.0	0.0
C	0.304	0.655	0.040	0.312	0.928	-0.240
ρ	0.552	0.535	0.746	0.500	0.519	0.709

上の表は、京阪神パーソントリップ調査(昭和45年)における京都市のデーターを用い、各手段が存在する40個のODペアを選び$\mathbb{Y}$を求めたものである(表は$\mathbb{Y}^T$の形で書かれている)。 手段としては、(1)国鉄、私鉄、地下鉄、(2)バス、市電、(3)タクシー、ハイヤー、であり、要因としては、(1)ラインホール所要時間、(2)料金、(3)アクセス時間、(4)エグレス時間を取っている。 また表中最後の行のρは各手段の相関係数である。