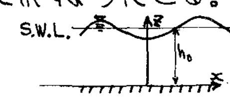
新しいクノイド波理論

京都大学防災研究所　正会員　土屋義人
京都大学大学院　学生会員　○安田孝志

1．緒　言　昨年度著者らは，従来の有限振幅波理論では解が一意に定まらず，この欠陥の根本的な克服のためには，Stokesによる物理的な波速の定義のいずれかを採用するという立場を離れて，双曲型の偏微分方程式を基礎式とした波動理論の確立が不可欠であることを指摘した。ここでは，Gardner−Morikawa 変換をくり返し行なうことによって速度ポテンシャルが存在する流体場での基礎方程式が水面変動のみの偏微分方程式に変換されることを示し，水面変動を未知量としたせつ動解を展開する波動理論を試みる。この結果，波速は必然的に特性曲線によって定義され，波速の物理的定義は不要となり，さらにまたBernoulli定数をせつ動するという問題も全く疑問のないものになり，従来の欠陥が完全に克服されるように思われる。ここでは，この立場でクノイド波の場合において理論を展開することにする。

2．双曲型偏微分方程式の誘導　速度ポテンシャルの存在する波動運動を考えれば，その基礎方程式は次式で与えられる。この場合，座標は図−1に示すようにとる。

$$\left.\begin{array}{l}\nabla^2\phi=0\;;\quad \text{境界条件}:\ \phi_t+\frac{1}{2}(\phi_x^2+\phi_z^2)+g(z-h_0)\big|_{z=h}=0\\ h_t+h_x\phi_x-\phi_z\big|_{z=h}=0\;,\quad \phi_z\big|_{z=h}=0\end{array}\right\}\quad(1)$$



図−1

ここに　ϕ：速度ポテンシャル，h：水位変動および h_0：平均水深　である。
任意の外乱によって生じる波動運動に独立な量はh_0であるから，これを基準長として

$$\Phi=\phi/h_0\sqrt{gh_0}\;,\quad x^*=x/h_0\;,\quad z^*=z/h_0\;,\quad t^*=t\sqrt{gh_0}/h_0\;,\quad h^*=h/h_0 \qquad (2)$$

で表わされる無次元量を定義すれば，(1)式は次のようになる。

$$\nabla^2\Phi=0\;,\ \Phi_{t^*}+\frac{1}{2}(\Phi_{x^*}^2+\Phi_{z^*}^2)+h^*-1\big|_{z^*=h^*}=0\;,\ h^*_{t^*}+h^*_{x^*}\Phi_{x^*}-\Phi_{z^*}\big|_{z^*=h^*}=0\;,\ \Phi_{z^*}\big|_{z^*=0}=0 \qquad (3)$$

ここで，次に示す変換を行なう。

$$\left.\begin{array}{l}\xi=\varepsilon^{1/2}(x^*-t^*)\;,\ \tau=\varepsilon^{3/2}t^*\;,\ z=z^*\;,\ h^*(x^*,t^*)=1+\varepsilon h_1(\xi,\tau)+\varepsilon^2h_2(\xi,\tau)+\cdots\\ \Phi(x^*,z^*,t^*)=\varepsilon^{1/2}\phi_1(\xi,\tau,z)+\varepsilon^{3/2}\phi_2(\xi,\tau,z)+\cdots\cdots\;,\ \varepsilon=(h_0/L_0)^2\end{array}\right\}\quad(4)$$

(3)および(4)式よりζについての方程式を誘導すれば，次に示す双曲型偏微分方程式が得られ，これが求める浅海域における波動方程式である。

$$\zeta_\tau+\frac{3}{2}\zeta\zeta_\xi+\frac{1}{6}\zeta_{\xi\xi\xi}=-\varepsilon\left\{\frac{1}{15}\zeta_{\xi\xi\xi\xi\xi}+\frac{1}{6}\zeta_{\xi\xi\tau}+\frac{3}{2}\zeta_\xi\zeta_{\xi\xi}+\frac{2}{3}\zeta\zeta_{\xi\xi\xi}+\frac{3}{2}\zeta^2\zeta_\xi+\frac{3}{2}\zeta\zeta_\tau+\zeta_\xi\Omega_\tau+\frac{1}{2}\Omega_{\tau\tau}\right\}+\varepsilon^2F^* \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Omega_\xi-\zeta=\varepsilon\left\{\Omega_\tau+\zeta\Omega_\xi+\frac{1}{2}\zeta_{\xi\xi}-\frac{1}{2}\zeta^2\right\}+\varepsilon^2G\\ \zeta=h_1+\varepsilon h_2+\varepsilon^2h_3+\cdots\cdots\;,\ F^*=F^*(\zeta)\;,\ G=G(\zeta)\end{array}\right\}\quad(6)$$

$\zeta(\xi,\tau)$は任意の外乱によって生じる水面変動を厳密に表示していることから，(5)式より浅海波の特性を明らかにすることができる。(5)式の右辺を $\varepsilon F(\zeta)$ と表わせば，(5)式の特性曲線から次式が得られる。

$$d\xi/d\tau=\frac{3}{2}\zeta+\zeta_{\xi\xi\xi}/6\zeta_\xi-\varepsilon F(\zeta)/\zeta_\xi \qquad (7)$$

(7)式において，$\varepsilon\ll1$ の場合には，波の伝播速度に対して支配的効果を持つのは第1項のamplitude dispersionによるsteepening deviationと第2項のfrequency dispersion　による

smoothing deviation であり，$\varepsilon \nless 1$ あるいは非線型効果の増大とともに第3項の効果が増大し，波の伝播は複雑になることがわかる。

3.　基礎方程式のせつ動解　いま，(7)式，すなわち波速を

$$d\xi/d\tau = C_0 + \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \cdots = C^*(=\text{const.}) \tag{8}$$

とおいて，permanent wave を取扱うことにすれば，$\theta = \xi - c^*\tau$ の変換を行なうことにより，(5)式は次のような常微分方程式に書き換えられる。

$$-c^*\zeta_\theta + \frac{3}{2}\zeta\zeta_\theta + \frac{1}{6}\zeta_{\theta\theta\theta} = -\varepsilon\Big\{\frac{1}{15}\zeta_{\theta\theta\theta\theta\theta} - \frac{1}{6}c^*\zeta_{\theta\theta\theta} + \frac{3}{2}\zeta_\theta\zeta_{\theta\theta} + \frac{2}{3}\zeta\zeta_{\theta\theta\theta} + \frac{3}{2}\zeta^2\zeta_\theta - \frac{3}{2}c^*\zeta\zeta_\theta - c^*\zeta\zeta_\theta$$
$$+ \frac{1}{2}c^{*2}\zeta_\theta\Big\} + \varepsilon^2 F^{**}(\zeta) \tag{9}$$

(9)式から1次および2次近似での常微分方程式は，それぞれ次のように与えられる。

$$-c_0 h_{1\theta} + \frac{3}{2}h_1 h_{1\theta} + \frac{1}{6}h_{1\theta\theta\theta} = 0 \tag{10}$$

$$\varepsilon\Big\{-c_0 h_{2\theta} - c_1 h_{1\theta} + \frac{3}{2}(h_1 h_2)_\theta + \frac{1}{6}h_{2\theta\theta\theta}\Big\} = \varepsilon\Big\{-\frac{3}{2}h_{1\theta}h_{1\theta\theta} - \frac{2}{3}h_1 h_{1\theta\theta\theta} + \frac{1}{6}c_0 h_{1\theta\theta\theta} - \frac{3}{2}h_1^2 h_{1\theta}$$
$$+ \frac{5}{2}c_0 h_1 h_{1\theta} - \frac{1}{2}c_0^2 h_{1\theta} - \frac{1}{15}h_{1\theta\theta\theta\theta\theta}\Big\} \tag{11}$$

以上の方法によって，第2次近似解まで計算した結果は，つぎのとおりである。

波形：$\zeta/h_0 = (H_0/h_0)\,\mathrm{cn}^2(\theta/\beta) - (H_0/h_0)(E/F - 1 + k^2)/k^2 + \frac{3}{4}(H_0/h_0)^2[\mathrm{cn}^4(\theta/\beta) - \mathrm{cn}^2(\theta/\beta)]$
$\quad + (1/4k^4)(H_0/h_0)^2[2k^2 - 2 + (2-k^2)(E/F)]$

波速：$C/\sqrt{gh_0} = 1 + (1/2k^2)\{2 - 3(E/F) - k^2\}(H_0/h_0) + (3/20k^2)(6k^2 - 6 - k^4)(H_0/h_0)^2$
$\quad + (1/40k^4)(E/F)\{97(E/F) - 45k^2 - 83\}(H_0/h_0)^2$

水粒子速度：$u/\sqrt{gh_0} = (H_0/h_0)\{\mathrm{cn}^2(\theta/\beta) - (E/F - 1 + k^2)/k^2\} - (1 - 9z^2/4)(H_0/h_0)^2\,\mathrm{cn}^4(\theta/\beta)$
$\quad + (1/4k^2)(H_0/h_0)^2\{7k^2 - 6 + 2(E/F) - 6(2k^2-1)z^2\}\,\mathrm{cn}^2(\theta/\beta) + (1/4k^4)(H_0/h_0)^2(7k^2 - 3k^4 - 4)$
$\quad + (1/4k^2)(H_0/h_0)^2\{8 - 4(E/F) - 5k^2\} - (3/4k^2)(1-k^2)(H_0/h_0)^2 z^2$

$v/\sqrt{gh_0} = [3(H_0/h_0)]^{1/2}(1/k)\{z(H_0/h_0) + (1/2k^2)(H_0/h_0)^2 z[31(E/F) - 28 + 16k^2 + (1-2k^2)z^2]$
$\quad + (H_0/h_0)^2 z(3z^2/2 - 2)\,\mathrm{cn}^2(\theta/\beta)\}\,\mathrm{cn}(\theta/\beta)\,\mathrm{sn}(\theta/\beta)\,\mathrm{dn}(\theta/\beta)$

質量輸送速度：$U/\sqrt{gh_0} = (1/6k^4)(H_0/h_0)^2\{-2k^2(E/F) + 4(E/F) - 3(E/F)^2 + k^2 - 1\}$
$\quad + (1/6k^4)(H_0/h_0)^2(\sqrt{gh_0}/C)\{2k^2(E/F) + 5(E/F) - 6(E/F)^2 + 1 - k^2\} \gtreqless 0$

水位差：$\delta/h_0 = (H_0/h_0)(E/F - 1 + k^2)/k^2 - (1/4k^4)(H_0/h_0)^2\{2k^2 - 2 + (2-k^2)(E/F)\}$

位相：$\theta/\beta = (1/2k)[3H_0/h_0]^{1/2}\{1 + (1/8k^2)[12(E/F) + 5k^2 - 10](H_0/h_0) - (1/128k^4)[12(E/F) + 5k^2 - 10](H_0/h_0)^2\}\cdot$
$\quad (x - ct)/h_0$

ここに，$F(k)$：第1種完全楕円積分，$E(k)$：第2種完全楕円積分，k：母数，および cn, sn, dn ：ヤコビの楕円関数 である。

4.　結　語　ここで述べたクノイド波理論は従来のものと相違して波速の定義を必要としないので，波動運動に伴う水粒子の運動などを検討する場合にきわめて有効と思われる。実験結果との比較については，講演時に説明したい。