

京都大学 正 員 岩佐義朗
 京都大学 学生員 田中伸和
 久保田鉄工 福住重郎

はじめに ここて取り扱う問題は、地震時のオイル・タンク、あるいは大洋における船舶のタンク内などでの流体の挙動を求める問題に適用される。従来、このような問題は、重複波的に取り扱われて来た。しかし、地震のような不規則で有限時間の外力をうける場合には、低次の共振周期で設計すると、静止からの変化、および外力の高周波成分の影響が考慮されないうため、不経済な設計になる恐れがあろう。

そのため、ここでは、大型電子計算機を用いて、基本になるものの非線型偏微分方程式を数値解析し、静止した容器に周期外力が作用する問題を取り扱う。とくに、長時間の演算に対しても安定な解が得られる差分方程式および境界条件を考えるとともに、数値結果と微小振幅波近似により得られる解析解との比較を行なった。

(1) 基礎方程式

N-S式を、非粘性・非回転の仮定を用いて整理すると、完全流体の挙動を表わす基礎式が得られる。いま、その基礎式を、(Fig-1)のように x 軸と平行に移動する容器内の $(\bar{x}, \bar{y})$ 座標に変換すると、

$$\left. \begin{aligned} ① \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}^2} &= 0 \\ ② \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{t}} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] + g \bar{\eta} + \bar{f}(t) \cdot \bar{x} \\ ③ \quad \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} \end{aligned} \right\} \text{at water surface}$$

が成り立つ。ここで、 $\bar{f}(t)$ は、 y -軸より $\bar{y}$ -軸までの距離を表わし、 g は重力の加速度、および $\cdot$ は、 t での微分を表わす。

同様に、粘性流体の基礎方程式は、N-S式と連続式より、

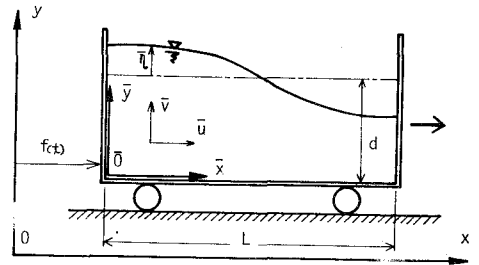
$$\left. \begin{aligned} ④ \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \bar{f}(t) \\ ⑤ \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - g \\ ⑥ \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

のようになる。

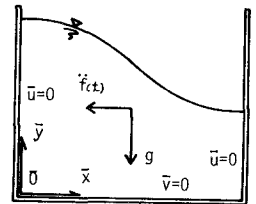
また、この問題に対する境界条件は、(Fig-2)のように、左右両壁上で $\bar{u}=0$ 、および底面で $\bar{v}=0$ が成り立つことである。

(2) 基礎方程式の差分化と計算手順

①~⑥式の差分は、高次差分を用いると、つぎのように表わされる¹⁾



(Fig-1)



(Fig-2)

$$\begin{aligned} ①' \quad \bar{\phi}_{ij}^{(k+1)} &= \bar{\phi}_{ij}^{(k)} + \alpha \left[\left\{ \frac{\bar{\phi}_{ij}^{(k)} + \bar{\phi}_{i+1,j}^{(k+1)}}{\Delta x^2} + \frac{\bar{\phi}_{ij}^{(k)} + \bar{\phi}_{i,j+1}^{(k+1)}}{\Delta y^2} \right\} / \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} \right) - \bar{\phi}_{ij}^{(k)} \right] \\ ②' \quad \bar{\phi}_{sj}^{(k+1)} &= \bar{\phi}_{sj} + \Delta t \left[\frac{1}{2} (\bar{u}_{sj} + \bar{u}_{sj}^*) + g \bar{\eta}_j - g_x \cdot j \cdot \Delta x \cdot \sin \omega t \right] + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\bar{u}_{sj} \frac{\partial \bar{u}_{sj}}{\partial y} (\bar{u}_{sj} - \bar{u}_{sj} \frac{\partial \bar{\eta}_j}{\partial x}) - \bar{u}_{sj} \frac{\partial \bar{u}_{sj}}{\partial y} (\bar{u}_{sj} + \bar{u}_{sj} \frac{\partial \bar{\eta}_j}{\partial x}) \right. \\ &\quad \left. + \bar{u}_{sj} - 2 \bar{u}_{sj} \frac{\partial \bar{\eta}_j}{\partial x} + g_x (\bar{u}_{sj} \sin \omega t - j \cdot \Delta x \cdot \omega \cdot \cos \omega t) \right] \\ ③' \quad \bar{\eta}_j^{(k+1)} &= \bar{\eta}_j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_{j+1/2} - \bar{F}_{j-1/2}) + \bar{u}_{sj} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

ただし、
$$\bar{F}_{j-1/2} = \bar{u}_{sj} \left\{ \frac{7}{12} (\bar{\eta}_{j-1} + \bar{\eta}_j) - \frac{1}{12} (\bar{\eta}_{j-2} + \bar{\eta}_{j+1}) \right\} + (\bar{u}_{sj})^2 \left\{ \frac{5}{24} (\bar{\eta}_{j-1} - \bar{\eta}_j) - \frac{1}{24} (\bar{\eta}_{j-2} - \bar{\eta}_{j+1}) \right\}$$

$$- (\bar{u}_{sj})^2 \left\{ \frac{1}{12} (\bar{\eta}_j + \bar{\eta}_{j+1}) - \frac{1}{12} (\bar{\eta}_{j+2} + \bar{\eta}_{j+1}) \right\} + (\bar{u}_{sj})^2 \left\{ \frac{3}{24} (\bar{\eta}_{j-1} - \bar{\eta}_j) - \frac{1}{24} (\bar{\eta}_{j+2} - \bar{\eta}_{j+1}) \right\}$$

⑦ $\ddot{f}(t) = g_x \cdot \sin \omega t$ (g_x, ω : 定数)

また、計算手順は、(Fig-3)に示す。

さらに、粘性流体としての取り扱いによる④~⑥式の差分化、および計算手順は、参考文献2)による。

(3) 解析解

いま、流速および水面勾配が小さいと仮定すると、②、③式において、それぞれの右辺第1項が省略することができ、基礎方程式は線型化される。

$\bar{\phi}, \bar{\eta}$ をつぎのように仮定すると、境界条件 (Fig-2)、および①式が満足され、

$$⑧ \quad \bar{\phi}(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cdot \cos n k \bar{x} \cdot \cosh n k \bar{y} \quad (k = \frac{\pi}{L})$$

$$⑨ \quad \bar{\eta}(t, x) = \frac{1}{2} a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot \cos n k \bar{x} \quad (")$$

さらに、⑩式および、 $\bar{x} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n k \bar{x}$ を用い、 $\bar{\eta} \ll d$ と仮定すると、

$$⑩ \quad \bar{\phi} = g \cdot d \cdot t - \frac{A_0 g_x}{2 \omega} (1 - \cos \omega t) + g_x \omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos n k \bar{x}}{\omega^2 - \theta_n^2} \frac{\cosh n k \bar{y}}{\cosh n k d} (\cos \omega t - \cos \theta_n t)$$

$$⑪ \quad \bar{\eta} = \frac{g_x}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \theta_n \cos n k \bar{x}}{\omega^2 - \theta_n^2} (\omega \sin \theta_n t - \theta_n \sin \omega t)$$

$$⑫ \quad \frac{\bar{\eta}}{f} = g(d - \bar{y}) + \bar{x} g_x \sin \omega t - \frac{A_0 g_x}{2} \sin \omega t + g_x \omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos n k \bar{x}}{\omega^2 - \theta_n^2} \frac{\cosh n k \bar{y}}{\cosh n k d} (\theta_n \sin \theta_n t - \omega \sin \omega t)$$

にはなる。ただし、 $\theta_n^2 = g \cdot k \cdot n \cdot \tanh n k d$

(4) 結果の比較と今後の方針

(Fig-4)は、 $\bar{x}=0, \bar{y}=0$ での⑩式と、①~③式より得られる結果の比較であり、(Fig-5)は、SUMMAC法²⁾より得られる結果との比較を示す。これらの比較より、差分解は、ほぼ正しい結果を示すものと思われ、解析解は、尤の小さい間の差分解の近似値として、与えることができる。

1) 岩佐・田中：差分法による流体振動の解析方法について、第18回水理講演会、1974

2) Chan, R.K.C., 他: Computer Studies of Finite-Amplitude Water Waves, Stanford Uni, No.104, 1969

