降雨の平均化時間がハイドログラフに及ぼす効果について

京都大学防災研究所　正員　石原安雄
同　上　　正員　○下島栄一

本研究は，水理模型による洪水流出の研究に関連して，一様な単傾斜斜面と一様な河道でモデル化された流出場を対象とする際に，降雨の時間的・空間的平均化スケールとそのときの流出hydrographとの関係について考察したものである。なお，この結果は洪水の流出解析を行なう際に降雨の時間的分布をいかなる時間単位で平均化して与えればよいかという問題にも適用することができる。

いま，精密な観測でえられた実際の降雨分布が$\hat{\tau}_p$時間ごとに与えられているとする(以下A降雨という)。これを模型上で$t_t M\cdot\hat{\tau}_p$ (t_t:時間相似比，$M>1$：整数)時間ごとに平均化して(B降雨)与えるものとしよう。なお，現地時間で$M\hat{\tau}_p$内の雨量$N\cdot\Delta R$ (ΔRは雨量測定の単位)はM個の時間間隔へ確率的にランダムに配分されると仮定する。

1．斜面の表層内の流れ　この流れは線型性の強い中間流であり，斜面長$L_{s,p}$は模型では$L_{s,m}(=x L_{sp}$, x:相似比)である。いま仮想的に模型にA降雨とB降雨を与えた場合には，斜面下流端での流れの水深の差は，図-1を参照して次式で与えられる。

$$h_m(L_{sm},t_m)-h'_m(L_{sm},t_m)=\frac{r_e t}{\delta}\frac{1}{\sigma_p}\left[\int_{\tau_p}^{t_{p,n-\beta-mM}}\{r_p(\eta)-r'_p(\eta)\}d\eta+\int_{t_{p,n-\beta}}^{t_{p,n}}\{r_p(\eta)-r'_p(\eta)\}d\eta\right]\quad\cdots\cdots①$$

ここに，r_e:有効降雨強度の相似比，δ:有効空隙率相似比，σ_p:現地での有効空隙率，r_p, r'_p：それぞれA降雨，B降雨の現地での降雨強度である。さて，前述のランダム性の仮定から，一般にM区間中初めからj区間($j<M$)までに$n\cdot\Delta R$ ($n\leq N$)の雨が降る確率$p(n,j)$は，

$$p(n,j)=W(n,j)\cdot W(N-n,M-j)/W(N,M)\quad,\text{ただし}\ W(n,j)=\Gamma(n+j)/\Gamma(n+1)\cdot\Gamma(j)\quad\cdots②$$

よって，その間の降雨量の期待値とその分散はそれぞれ次式となる。

$$\Delta R\sum_{n=0}^{N}n\,p(n,j)=\frac{\Delta R\cdot N\cdot j}{M}\quad\cdots③\qquad \Delta R^2\sum_{n=0}^{N}(n-\bar{n})^2p(n,j)=\frac{N}{M}\frac{M+N}{M+1}j\left(1-\frac{j}{M}\right)\Delta R^2\quad\cdots④$$

したがって，$M\hat{\tau}_p$単位で降雨系列をみたとき各要素間に相関がないと仮定すると，式①右辺の才1項と才2項は独立として取扱えるから，水深差の期待値及び分散は次式となる。

$$E(h-h')=0\quad\cdots⑤\qquad \sigma_h^2=\left(\frac{r_e t}{\delta\sigma_p}\right)^2\sum_{i=1}^{2}\frac{(N_i\Delta R)^2}{M}\cdot\frac{1+\frac{M}{N_i}}{M+1}j_i\left(1-\frac{j_i}{M}\right)\quad\cdots⑥$$

ただし　$i=1$のとき，$t_{p,n-\beta+M}, t_{p,n-\beta}$
$i=2$のとき，$t_{p,n-\beta-mM}, t_{p,n-\beta-(m+1)M}$

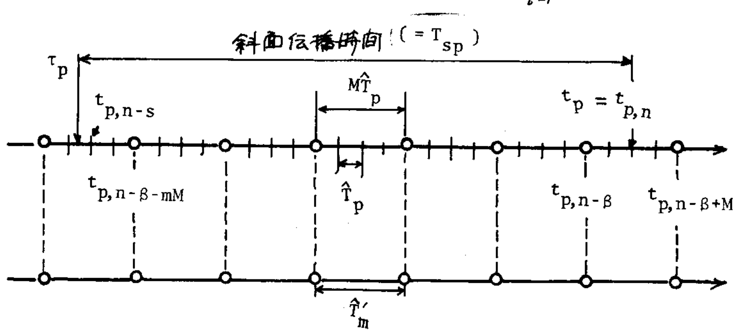

図-1　平均化時間説明図

$s=[T_{sp}/\hat{\tau}_p]$
[ ]：ガウス記号
$T_{sp}=t_p-\tau_p$
$0\leq\beta\leq M$

つぎに単位巾当りの流量は $q_m = k_m \cdot i_m \cdot h_m$,（k_m：透水係数，i_m：勾配）であるので，その期待値および分散は容易に求まり，その精度は次式で与えられるが $j=M/2$ のとき最も悪い。

$$\frac{\sigma_q}{\bar{q}_m} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{M/\sqrt{M+1}}{S} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{N_i \Delta R}{M\hat{\tau}_p}\right)^2/2}}{\sum_{j=m-s+1}^{}\bar{r}_{pj}/S} = \frac{1}{\sqrt{2(M+1)}} \frac{M\hat{\tau}_p}{T_{s.p}} \frac{\sqrt{\sum_i \left(\frac{N_i \Delta R}{M\hat{\tau}_p}\right)^2/2}}{\sum_j \bar{r}_{pj}/S} \quad ;\ \bar{r}_{pj}\ 観測降雨 \quad \cdots\cdots ⑦$$

2. 河道内の流れ　　前項で述べた斜面からの流出量(確率変量）を受けて河道流が生ずるので，その最小の時間単位は，斜面流に対して $\hat{\tau}_p$ にとったので，これと同じにする必要があろう。いま簡単のために，斜面流の場合と同様に，河道流に対しても線型性を仮定する。河道末端の流水断面積は，$A(L_{c.m}, t_m) = \int_{t_m - T_{c.m}}^{t_m} q(\xi)d\xi = \sum_{j=1}^{s_c} q(x_j t_j)\delta t_m$, $T_{c.m}$：河道流伝播時間，$s_c = T_{c.m}/\delta t_m$ ，$\delta t_m = t \cdot \hat{\tau}_p$ ，$L_{c.m}$：河道長。$q\delta t_m$ は確率変数と考えられ，$q\delta t_m = \overline{q\delta t_m} + q_*$ と分離すると，流水断面積の期待値は $\bar{A} = E(A) = \sum \overline{q\delta t} \cdots ⑧$ 　その分散は，$E(A-\bar{A})^2 = \sigma_A^2 = \sum_j Var(q_{*j}) + 2\sum_{k>j} COV(q_{*j}, q_{*k}) \cdots\cdots ⑨$ 。　さて，式⑨の諸量を求めるため 1. で使った降雨モデルを想定する。即ち，j 番目まで (S_j) に $n \cdot \Delta R$ の雨量があり，さらに k 番目 $(k>j)$ まで (S_k) に $m \cdot \Delta R$ の雨量がある場合，本課題の共分散は，$\sum_{m=0}^{N} m \left\{\sum_{n=0}^{m} n \cdot p(n, j)\right\} p(m, k) = \frac{N}{M} j \left\{\frac{N-1}{M+1}k + \frac{M+N}{M+1}\right\} \cdots\cdots ⑩$ の関係を用いると，$COV(S_k, S_j) = \frac{N(M+N)}{M^2(M+1)} j(M-k)\Delta R^2 \cdots\cdots ⑪$ 　また，$\sum_{k=1}^{k} Var(S_k) + 2\sum_{k=2}^{k}\sum_{j=1}^{k-1} COV(S_k, S_j) = \frac{N(M+N)}{12M^2(M+1)} k(k+1)\left\{-3k(k+1) + 2M(2k+1)\right\}\Delta R^2 \cdots ⑫$
以上の関係を用い，$N \gg M$ とすれば，流水断面積の標準偏差は，次式で与えられる。

$$\sigma_A \sim \frac{r_e x t}{\sqrt{3}} \cdot L_{s.p} \cdot \frac{M\hat{\tau}_p}{T_{s.p}} \cdot \sqrt{M\hat{\tau}_p} \cdot \sqrt{T_{c.p}} \cdot \sqrt{\frac{1}{M}\left(1-\frac{1}{M}\right)} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{\alpha+1} r_{*pj}^{(1)2} + r_{*pj}^{(2)2}}{2\alpha+4}} \quad \cdots\cdots ⑬$$

ここに，$\alpha = \left[\frac{s_c - \beta}{M}\right]$ ，[ ]：ガウス記号，$T_{s.p}$；斜面伝播時間，$T_{c.p}$：河道伝播時間，$r_{*pj}^{(i)} = N_j \Delta R / t \cdot M \Delta t$ ，suffix (i) $(i=(1),(2))$ は $q(x_j t_j)$ の降雨積分の時間，t_j, $t_j - T_{sp}$ における $M\hat{\tau}_p$ 単位の平均降雨強度。

一方，流水断面積は，$\bar{A}_m = 2 \cdot \bar{r}_m \cdot L_{s.m} \cdot T_{c.m} = 2 r_e x \cdot t\, \bar{r}_p \cdot L_{s.p} \cdot T_{c.p} \quad \cdots\cdots ⑭$
$\bar{r}_p$：平均降雨強度，で表わされるから，河道流の線型仮定により，流量，流水断面積の精度は，

$$\frac{\sigma_Q}{\bar{Q}_m} = \frac{\sigma_A}{\bar{A}_m} \sim \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{M\hat{\tau}_p}{T_{c.p}}} \cdot \frac{M \cdot \hat{\tau}_p}{T_{s.p}} \sqrt{\left(1-\frac{1}{M}\right)\frac{1}{M}} \frac{\sqrt{\sum_{j=0}^{\alpha+1} r_{*pj}^{(1)2} + r_{*pj}^{(2)2} / 2\alpha+4}}{\bar{r}_p} \quad \cdots\cdots ⑮$$

の様になる。

3. 以上の議論はいずれも線型仮定のもとで成立するものであり，実際には非線型であるので，厳密には擾乱の伝播距離の変動に基づく空間的な広がりを考慮しなければならない。この場合，一般的な議論は困難であり，ただ流水断面積と流量の関係を $A = KQ^p$ とおいた場合の $p=0.5$ のみが一応可能となる。しかしながら，局所線型性すなわち折線近似を行なったときの一つの部分直線で表現される部分についてのみ考えるときは上の結果が適用できる。したがって，出水の規模等に応じて，降雨の時間分布をある時間ごとに平均化することによって生ずる誤差の程度の評価が可能であり，水理模型実験で与えるべき降雨分布の時間分布，あるいは出水解析で用いるべき時間単位を合理的に決定することができる。

〈参考文献〉 伏見康治：確率論及び統計論，河出書房，昭和23年