

特性曲線法による河床変動計算について

神大工 正 ○ 松梨順三郎

" 正 久保幸男

阪道公団 正 島田博仁

洪水流による河床の浸掘、堆積については、従来、定性的にその特性がのべられ、主要実験および実測について、その資料は少く、断片的に発表されている場合が多い。ここでは特性曲線法を用い、一次元不定流としての洪水流を数値解析して、河床の変動特性と定量的に検討しようとする。

1 基礎方程式 広幅・矩形断面一様水路

における水流の運動方程式と連続式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial Z}{\partial x} = gI \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

流砂量式とその連続式は

$$\frac{\partial \delta_B}{\partial t} = a_s \left\{ \frac{u_*^2}{(\alpha/p - 1)gd} \right\}^p \quad (3)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{B(1-\lambda)} \frac{\partial (\delta_B B)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

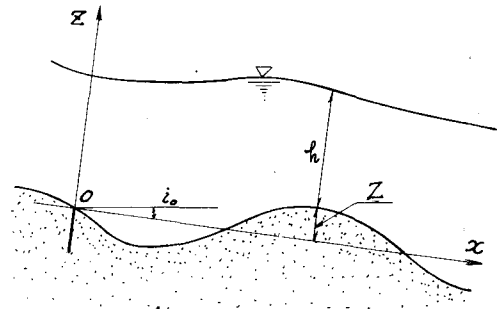


図-1

とする。ここに、 $I = I_0 - \frac{n^2 u^2}{R^{4/3}}$ 、 n は Manning 係数、 u : 平均流速、 h : 水深、 Z : 河床高、 B : 河幅、 λ は砂の空隙率、 δ_B : 単位幅流砂量、 d : 流砂の中央粒径、 u_* : 摩擦速度、 a_s と p は常数で、フ라우ン型の場合、 $a_s = 10$ 、 $p = 2$ とする。(1)、(2)、(4)式に未知量 u 、 h 、 Z の全微分の式を代入し、 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial h}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial h}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial Z}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial Z}{\partial x}$ とあらわめて未知量と考えると、これは、つぎのように行列表示できる。

$$\begin{bmatrix} 1 & du & 0 & g & 0 & g \\ 0 & h & 1 & u & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & Y & 1 & 0 \\ dt & dx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dt & dz \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial u / \partial t \\ \partial u / \partial x \\ \partial h / \partial t \\ \partial h / \partial x \\ \partial Z / \partial t \\ \partial Z / \partial x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gI \\ 0 \\ 0 \\ du \\ dh \\ dZ \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここに、

$$X = \frac{K(2p+1)}{1-\lambda} \frac{n^{2p+1}}{d^{p-1}} \frac{u^{2p}}{R^{(2p+1)/6}}, \quad Y = \frac{K(2p+1)}{6(1-\lambda)} \frac{(nu)^{2p+1} R^{(3-p)/3}}{d^{p-1} h^2}, \quad K = \frac{a_s \sqrt{g}}{(\alpha/p - 1)^p} \quad (6)$$

微小変動の伝播方向は、基礎方程式(5)の特性方向として、この式の係数行列式 D と 0 とするこことよりえられる。すなわち、 $\alpha = 1$ とし、

$$C^3 - 2uC^2 - (gh - u^2 + gx)C + g(xu - Yh) = 0 \quad (7)$$

ここに、 $C = \frac{dx}{dt}$ であり、上式は一般に三つの根 C_1 、 C_2 、 C_3 とする。これらの近似根とすると、

$$C_1 = r_1(1 + \varepsilon_1), \quad C_2 = r_2(1 + \varepsilon_2), \quad C_3 = r_3(1 + \varepsilon_3) \quad (8)$$

となる。ここに、 $r_1 = u + \sqrt{gh}$, $r_2 = u - \sqrt{gh}$, $r_3 = -g(xu - yh)/(u^2 - gh)$, $\varepsilon_1 = (a_1 - b)/\{(r_2 - r_1)(r_3 - r_1)\}$,
 $\varepsilon_2 = \{a - (r_1 - r_3)\varepsilon_1\}/(r_2 - r_3)$, $\varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, $a = 2u - (r_1 + r_2 + r_3)$, $b = -(gh - u^2 + gx) - (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)$

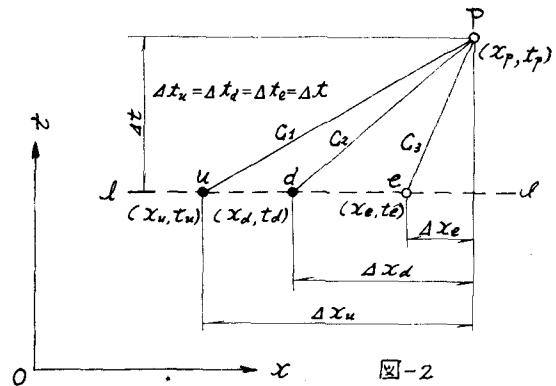
つぎにこれら三つの特性曲線上でそれぞれ成立すべき関係式は、式(6)の解が有限値とこの条件として、つぎのようにえられる。

$$\frac{C_i}{g}(u - C_i)du - (y + C_i)dh + (u - C_i)dZ = C_i(u - C_i)I dt \quad (9)$$

ただし、 $i = 1, 2, 3$ とする。

2 数値計算の手順

いま図-2のように、初期条件として、直線 l 上の未知量 u, h, Z が既知であるとする。より微小時間経過した点 u と未知量とする。この点と通る特性曲線を C_1, C_2, C_3 とし、直線 l と点 u, d, e で交わるものとする。初めに u 点の位置 (x_u, t_u) と与えて、その点の未知量 (u_p, h_p, Z_p) を求める手



法と考えられるが、得られる差分方程式の非線形性に問題があり、ここでは、 u, d, e を既知量として未知量 u の位置および未知量と基礎方程式(8),(9)の差分化によって決定する。この場合、三つの既知量は独立には与えられぬ。たとえば、 u, d を独立の既知量とすると、これから出発する特性曲線 C_1, C_2 の交点として u 点の位置が決定し、この点と通る第3の特性曲線 C_3 と直線 l との交点として点 e の位置が従属的にきまってくる。(したがって、たとえ e 点の座標 x_e は未知量となる、式(8),(9)を差分式に与えると、

$$C_1: \quad \Delta x_u / \Delta t_u = [C_1]_u = C_{1u} \quad (10)$$

$$C_{1u}(u_u - C_{1u})\Delta u_u / g - C_{1u}\Delta h_u + (u_u - C_{1u})\Delta Z_u = C_{1u}(u_u - C_{1u})I_u \Delta t_u \quad (11)$$

$$C_2: \quad \Delta x_d / \Delta t_d = [C_2]_d = C_{2d} \quad (12)$$

$$C_{2d}(u_d - C_{2d})\Delta u_d / g - C_{2d}\Delta h_d + (u_d - C_{2d})\Delta Z_d = C_{2d}(u_d - C_{2d})I_d \Delta t_d \quad (13)$$

$$C_3: \quad \Delta x_e / \Delta t_e = [C_3]_e = C_{3e} \quad (14)$$

$$C_{3e}(u_e - C_{3e})\Delta u_e / g - C_{3e}\Delta h_e + (u_e - C_{3e})\Delta Z_e = C_{3e}(u_e - C_{3e})I_e \Delta t_e \quad (15)$$

幾何学的な座標関係から

$$x_u + \Delta x_u = x_d + \Delta x_d = x_e + \Delta x_e \quad (16), (17)$$

$$t_u + \Delta t_u = t_d + \Delta t_d = t_e + \Delta t_e \quad (18), (19)$$

$$u_u + \Delta u_u = u_d + \Delta u_d = u_e + \Delta u_e \quad (20), (21)$$

$$h_u + \Delta h_u = h_d + \Delta h_d = h_e + \Delta h_e \quad (22), (23)$$

$$Z_u + \Delta Z_u = Z_d + \Delta Z_d = Z_e + \Delta Z_e \quad (24), (25)$$

の16個の式となる。この場合の未知量は、式(16)で与え16個となる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_u, \Delta x_d, \Delta x_e; \Delta t_u, \Delta t_d, \Delta t_e; \Delta u_u, \Delta u_d, \Delta u_e \\ \Delta h_u, \Delta h_d, \Delta h_e; \Delta z_u, \Delta z_d, \Delta z_e; x_e \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

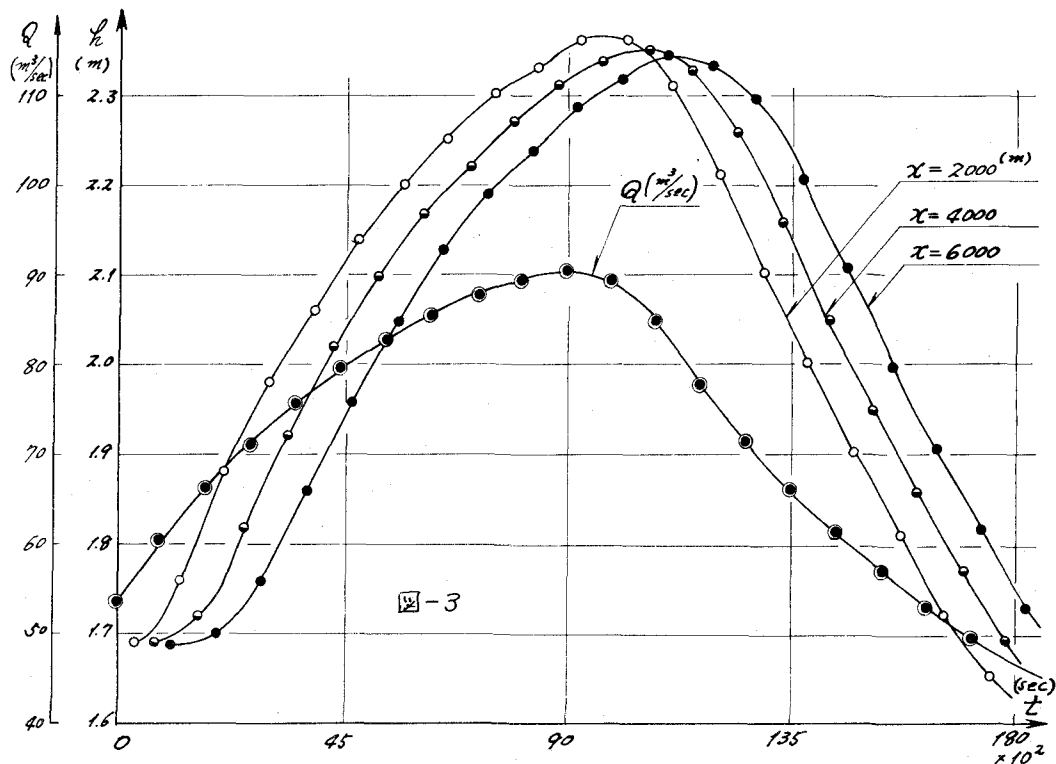
以上によって形式的には解を決定することは可能であるが、式(14)、(15)の未知量(26)に同じ二次形式がない。したがって、こゝでは次のような段階的取り扱いとする。まず、式(10)、(12)、(16)、(18)と一組の方程式系とすると、これは未知量 $\Delta x_u, \Delta t_u, \Delta x_d, \Delta t_d$ について同じ形式であり、これを解くと、

$$\Delta t_u = \Delta t_d = \Delta t, \quad \Delta x_u = C_{1u} \Delta t, \quad \Delta x_d = C_{2d} \Delta t \quad (27)$$

となる。ただし、 $\Delta t = (x_u - x_d) / (C_{2d} - C_{1u})$ とする。つぎに、 $C_{3e} = C_{3d} + (C_{3d} - C_{3u})(x_e - x_d) / (x_d - x_u)$ とし、式(14)、(17)、(19)と一組の方程式系とすると、これは未知量 $x_e, \Delta x_e, \Delta t_e$ について同じ非線形方程式となるが、その解はつぎのように与えられる。

$$\Delta t_e = \Delta t, \quad \Delta x_e = \frac{C_{3d} + (C_{3d} - C_{3u}) \Delta x_d / (x_d - x_u)}{1 + (C_{3d} - C_{3u}) \Delta t / (x_d - x_u)} \cdot \Delta t, \quad x_e = x_d + \Delta x_d - \Delta x_e \quad (28)$$

よって、已々の位置が決定されると、 u_e, h_e, z_e, C_{3e} はすべて既知となる。したがって、残りの9つの関係式(11)、(13)、(15)、(20)、(21)、(22)、(23)、(24)、(25)は残りの9つの未知量 $\Delta u_u, \Delta u_d, \Delta u_e; \Delta h_u, \Delta h_d, \Delta h_e; \Delta z_u, \Delta z_d, \Delta z_e$ について線形であり、これを解いて未知量の解をつぎのように決定することができる。



$$\left. \begin{aligned} z_p &= z_u + \Delta z_u, & t_p &= t_u + \Delta t_u, & u_p &= u_u + \Delta u_u \\ h_p &= h_u + \Delta h_u, & z_p &= z_u + \Delta z_u \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

3 数値計算 尼崎市下川の□鉄文更付近の下流を対象とした。 $B=31\text{m}$, $\alpha=2.65$, $\lambda=\frac{\text{g/cm}^3}{0.3}$, $d_{50}=0.5\text{mm}$, $n=0.027$, $i_0=1/1000$, □鉄文更を上流端 $x=0$ とし、この地点での流入ハイドログラフは兵庫県の資料により、それを修正して、図-3の $Q \sim t$ で与えた。なお上流端は固定床とする。 $\Delta t=100\text{sec}$ とし、172本の C_1 特性曲線上でそれぞれ100度の未知更と求め、図-3, 4, 5の結果をえた。図-3は下流2, 4, 6 km地点における洪水位の時間変化を示す。図-4は同地点における河床高

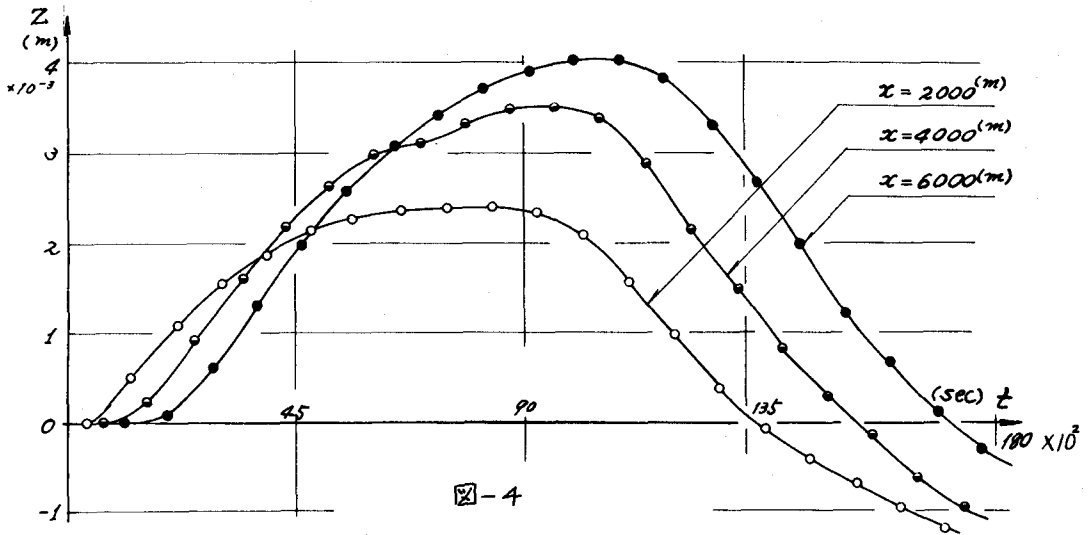


図-4

の時間変化を示す。これより各地点で河床高は洪水のピーク時刻までは増殖するが、それ以後は洗掘することになる。図-5は上流端の洪水のピーク時刻9000sec, およびその前後6000, 12000secにおける河床高の空間的変化を示す。図の①, ②, ③の曲線は図-4の結果を参照して予測したものである。固定床直下流は洪水初期に増殖するが、時間とともに洗掘され2頁の値となり、一定の局所洗掘にあちつくさと思われ。

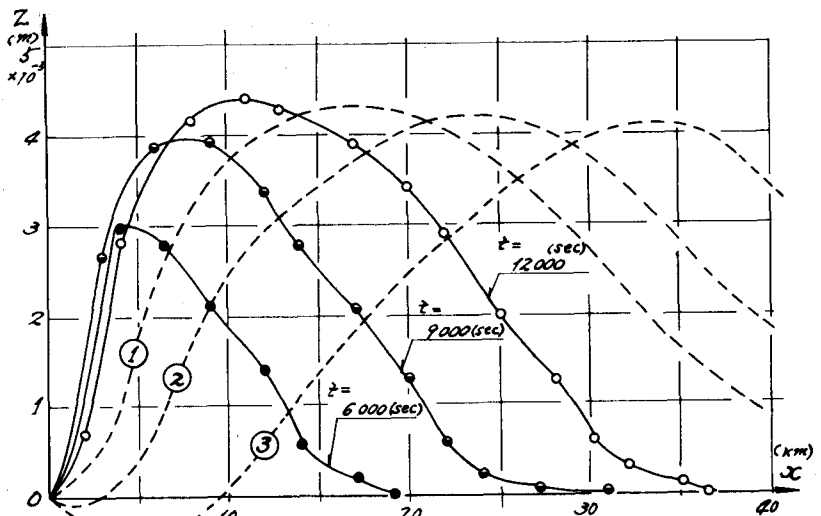


図-5

定性的には洪水による河床変動の特性を示していると考えらる。しかし定量的には河床高が意外に小さく、内題があり、ここでは中間的結果として報告します。