2−step L.W.法による河床変動計算について

神戸大学工学部　正員　松梨順三郎
神戸大学工学部　学生員○高久　博

Ⅰ．はじめに

河床変動の一次元解析法には、基礎方程式として水の運動方程式と連続方程式、流砂の運動方程式と連続方程式が用いられるが、これらは、流下距離xと時間tを独立変数、水深h、流速uと河床高zを従属変数とする双曲型偏微分方程式系に変形できる。この方程式系は非線形であり、非定常項を省略せずに解くためには、電算機による数値計算に頼らざるを得ない。従来、不等流の数値計算に関して、種々の差分法による研究が行なわれているが、基礎方程式の保存則性に注目して導かれたLax−Wendroffの差分法がよく知られている。

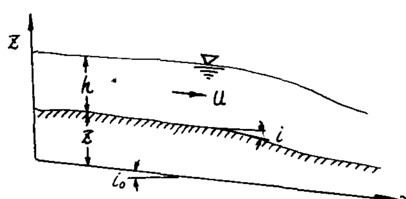
本文は、洪水流による河床変動解析に際して、その基礎方程式系を2−step Lax−Wendroffの差分法で解き、河床の場所的変動について考察したものである。

Ⅱ．河床変動の基礎式

図−1を参照すれば、水流の基礎方程式は

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2g}\right)=i-i_f \qquad (2)$$



図−1

ここに、$i=i_0-\partial z/\partial x$、$i_f$は摩擦こう配である。

一方、流砂の運動方程式および連続方程式は、それぞれ次式のように表わせる。

$$q_B=\alpha U_*(U_*^2-U_{*c}^2)^P \fallingdotseq \alpha U_*^{2P+1} \quad (U_*\gg U_{*c}) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{1}{B(1-\lambda)}\frac{\partial}{\partial x}(Bq_B)=0 \qquad (4)$$

ここに、q_Bは単位幅当りの流砂量、U_*は摩擦速度、λは砂の空隙率、αとPは定数である。(1)〜(4)式が基礎方程式となる。幅が一様な広矩形断面では、$R\fallingdotseq h$と近似できるから、抵抗法則にマニング型を用いれば、

$$U_*=n\cdot g^{1/2}\cdot u/h^{1/6}\ ,\quad i_f=U_*^2/gh \qquad (5)$$

となる。結局、(3)式を(4)式に代入整理すれば、次のようなConservation formにまとめられる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial x}=0 \qquad (6)$$

ここに、

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}h\\u\\z\end{bmatrix},\quad \mathbb{F}=\begin{bmatrix}uh\\u^2/2+g(h+z)\\q_B/(1-\lambda)\end{bmatrix},\quad \mathbb{b}=\begin{bmatrix}0\\g\left(i_0-\dfrac{n^2u|u|}{h^{4/3}}\right)\\0\end{bmatrix} \qquad (7)$$

$$q_B=\alpha U_*^{2P+1}=K\cdot u^{2P+1}\cdot h^{-\frac{2P+1}{6}},\qquad K\equiv a_s\cdot n^{2P+1}\cdot\{(\sigma/\rho)-1\}^{-P}\cdot g^{1/2}\cdot d^{-P+1}\equiv const. \qquad (8)$$

Ⅲ. Conservation form の差分化

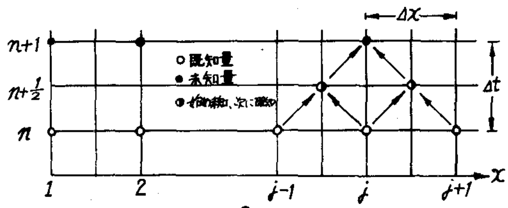


図-2

(6)式を 2-step Lax-Wendroff の方法で差分する。

• 1-step

$$ {}_{n+\frac{1}{2}}\mathbb{U}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left({}_{n}\mathbb{U}_{j+1} + {}_{n}\mathbb{U}_{j}\right) - \frac{\lambda}{2}\left({}_{n}\mathbb{F}_{j+1} - {}_{n}\mathbb{F}_{j}\right) + \frac{\Delta t}{2}\,{}_{n}\mathbb{b}_{j+\frac{1}{2}} \qquad (9) $$

• 2-step

$$ {}_{n+1}\mathbb{U}_{j} = {}_{n}\mathbb{U}_{j} - \lambda\left({}_{n+\frac{1}{2}}\mathbb{F}_{j+\frac{1}{2}} - {}_{n+\frac{1}{2}}\mathbb{F}_{j-\frac{1}{2}}\right) + \Delta t\,{}_{n+\frac{1}{2}}\mathbb{b}_{j} \qquad (10) $$

ただし、

$$ \lambda \equiv \frac{\Delta t}{\Delta x}、\ {}_{n}\mathbb{U}_{j} = \begin{bmatrix} {}_{n}h_{j} \\ {}_{n}u_{j} \\ {}_{n}z_{j} \end{bmatrix}、\ {}_{n}\mathbb{F}_{j} = \mathbb{F}({}_{n}\mathbb{U}_{j})、\ {}_{n}u_{j} = u(n\Delta t, j\Delta x) $$

この差分法の安定条件として、Von-Neumann の必要条件を採用した。つまり、線形問題と仮定した場合に、$\mathbb{F} = \mathbb{A}\mathbb{U}$ ($\mathbb{A} \equiv$ constant matrix) となるから、フーリエ解析を使えば解の有界性より、$\mathbb{A}$ の最大固有値 μ が次式を満足しなければならない。

$$ \mathrm{Max}\,|\lambda\mu| \leq 1 + o(\Delta t) \qquad (11) $$

Ⅳ. 数値計算法

Explicit 差分法であるから、与えられた初期条件と境界条件の下で $n\Delta t$ レベルの水理量から $(n+1)\Delta t$ レベルの水理量が直接求まる。初期条件の影響は、演算回数が進むにつれ無視できるが、上下流端での境界条件には特に注意を払わないと、そこで解が発散してしまう。

そこで、・初期条件；河床高を一定、流量を一定かつ等流状態とする。

・上流端境界条件；洪水ハイドログラフ(図-3)から ${}_{n+1}Q_{1}$ を与える。${}_{n+1}h_{1}$ はボックス型差分により求める。河床は固定端とする。

・下流端境界条件；河川の途中で計算を打ち切ったので、全水理量を折り返す。

実際の計算には、(9)(10)式のベクトル形をスカラー形に直して、逐次解を求めなければならない。明石川をモデルにした場合(川幅 50.4 m、平均河床勾配 0.0037、マニングの粗度係数 $n = 0.03$)、Von-Neumann の必要条件を求めると、$\Delta x/\Delta t > 4.8$ が得られた。そこで、差分間隔を、$\Delta x = 100$ m、$\Delta t = 60$ sec として数値計算を実行した。

Ⅴ. 結果

図-4 は、時間をパラメータとして、x と z との関係を図示したものである。図から洪水流量の増加にともなって河床が盛り上がり、それが次第に下流へ伝播していく様子がわかる。また、微小ではあるが、河床の洗堀もみられる。

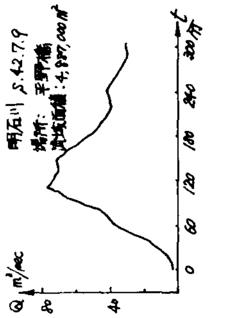


図-3

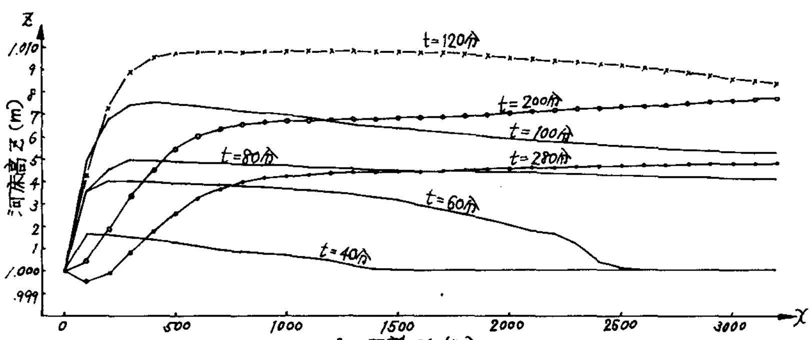


図-4

参考文献　1)伊藤編「数値計算の応用と基礎」アテネ出版。