

二次元回転流における拡散解析

大阪大学工学部 正員 村岡 浩爾
大阪大学工学部 正員 O中辻 啓二

1. まえがき : 着者は分散過程を含む水理現象の数理モデルを究極目的として近似計算に伴う誤差評価を主として非定常移流分散方程式を対象に行っているが、本文では先の水理講演会¹⁾において誘導した有限要素法(WRM法)を二次元回転流場に適用して拡散解析を行なったので、その結果を報告する。

2. Galerkin法の適用について : 二次元非定常拡散解析法として従来からの①特性曲線法と併用したexplicit法、②implicit化してSORで解く方法、③方向性を考慮したADI法等があるが、いずれも解の収散、不安定性を抑制するために考案されたもので、その根拠はTaylor展開に基づく差分近似であり誤差特性は一次元解析¹⁾²⁾に準ずるものと考えてよい。したがって、差分間隔は流況場特性により拘束され複雑な境界条件を有した広範囲の平面拡散を解くには大量の記憶容量・演算時間を必要とすることになる。

本文では、要素領域内で未知量を形状関数の線型結合の関数近似で表わし原微分方程式との残差が最小になるように解析することにより有限要素法と類似の定式化が行なえるWeighted Residual Methodを用いて移流分散方程式の解法を考える。

二次元移流分散の基礎式は次式のようなものである

$$L[C] \equiv \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} - D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

空間変数離散化のために基底関数 $W_{ij}(x, y)$ を用いて、近似解を

$$C_m(x, y, t) \equiv \sum_i \sum_j C_{ij}(t) \cdot W_{ij}(x, y) + W_0(x, y) \quad (2)$$

と仮定し、基底関数を重み関数とする Galerkin法を用いるならば、式(1)を解くことは近似解の未定係数 $\{C_{ij}(t)\}$ を決定される問題に変換され次式のようなになる。

$$\begin{aligned} & \int \int \{L[C_m]\} \cdot W_{ij}(x, y) \cdot dx dy \\ &= \int \int \{C'W + U \cdot C \cdot W^{(x)} + V \cdot C \cdot W^{(y)} - D_x C \cdot W^{(xx)} - D_y C \cdot W^{(yy)}\} W dx dy \\ &+ \int \int \{U W_0^{(x)} + V \cdot W_0^{(y)} - D_x \cdot W_0^{(xx)} - D_y \cdot W_0^{(yy)}\} W dx dy = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

項別積分ならびに境界条件を考慮することにより、上式は簡潔に行列表示できる。いま基底関数系として図-1に示すような四角錐

$$W(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z - zx - yz - zy + 1 \quad (4)$$

を仮定すると最終的には次の常微分方程式系を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{dC_0}{dt} + 1/8 \cdot \{dC_1/dt + dC_2/dt + dC_3/dt + dC_4/dt\} \\ &= -U/2 \Delta x \cdot (C_1 - C_3) - V/2 \Delta y \cdot (C_2 - C_4) \\ &+ 3 D_x / 2 (\Delta x)^2 \cdot (2C_0 - C_1 - C_3) + 3 D_y / 2 (\Delta y)^2 \cdot (2C_0 - C_2 - C_4) \end{aligned} \quad (5)$$

Crank-Nicolson法と比較するならば右辺常微分項に関数近似することによる重み関数を負荷した形となり、差分近似法であるC-N法はHeaviside関数による近似であるといえる。式(5)は時間に関して中心差分近似することによりimplicitな5変数差分近似法となる。

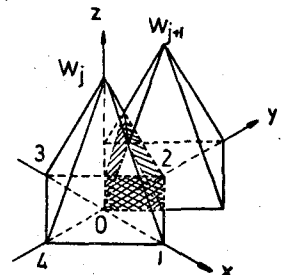


図1 基底関数系

系統的反復法であるSORを用いて解かれる

3. 回転流場での数値解析 ; 角速度 ω で等心円運動する回転流場でのガウス濃度分布(図2)の変動状況を求めたのが図3である。一回転48 stepの演算時間であり、分布形状の中心と回転軸とは3 Δx 距離異なる。C-N法、GAL法による4.1/4回転後の分布形状を示したのが図3(a)(b)であり、前者は計算全領域にわたり激しく凸凹が生じ最大濃度は46%程度に減衰する。他方、後者では分布形状の歪みは前者に比較して小さいが形状後面で20%の負の濃度が発生し C_{max} は64%になる。図2 初期濃度分布形状この変動を顕著に表わすために回転平面における濃度の正負を示したのが図4である。

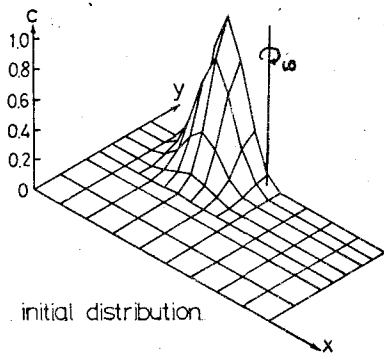
波数解析によれば implicit な近似の場合には増幅係数は常に1.0であり、誤差の発生は各波数成分の位相のずれによるものである。本計算では半径 r_0 の円筒形との切断面における濃度分布形状が一様流速 $U=40 \times 10^{-3}$ で伝播されると考えればよく、有効伝達波数領域($k \Delta x \leq \pi$)内の高波数成分の遅れにより分布形の後面で負の濃度が発生し振動し始める傾向が図4からも明らかである。C-N法はGAL法に比較して位相誤差が小さく全計算領域にわたって歪み、境界条件 $C_b=0.0$ の拘束から凸凹がより激しくなっているものと考えられる。

差分近似法との対比から直交格子網を散えて採用した結果、誤差の増大がみられ簡明に行列表示できる利便を用いていないが演算時間の短縮からも考慮すべきであろう。唯、一次元解析でエルミット関数近似よりも線型近似の方が精度高いことから分かるように、形状関数の選定が正確度において重要な要素であり検討する必要がある。

最後に本研究を進めるにあたり、適切な助言を賜った室田明、榎本亨両教授に謝意を表す。

(参考文献)

- (1) 村岡・中工: 第18回水理講演会講演集 74年2月
- (2) 村岡・中工: 土木学会論文報告集 73年5月



initial distribution

図2 初期濃度分布形状

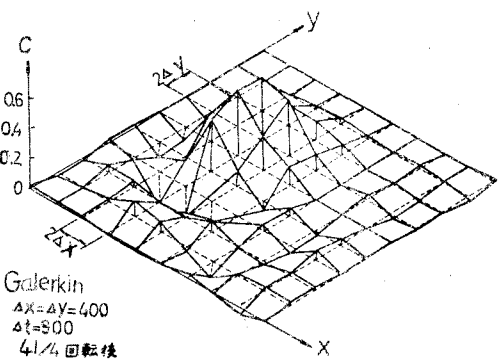
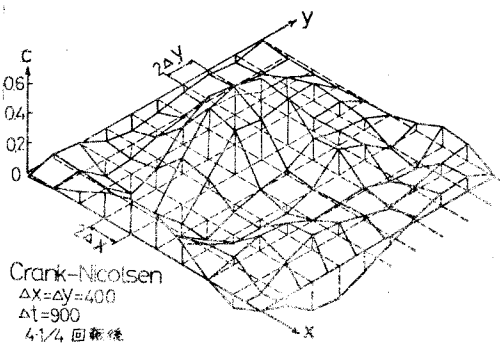


図-3 濃度分布計算例(三次元)

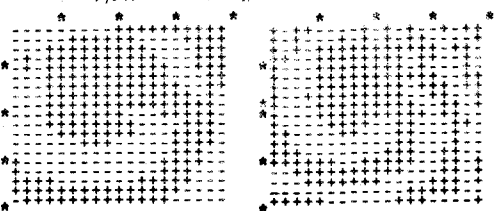


Fig.4(a) Crank-Nicolson

Fig.4(b) Galerkin

図-4 濃度分布計算例(二次元)