グラフ理論による開水路網の不定流解析法

京都大学工学部　正　員　岩佐　義朗
京都大学工学部　正　員　○綾　史郎

1．まえがき

開水路流れの解析の対象は、主として単一水路に向けられ、複雑な連結構造を持つ水路網でのそれは、管路と異なり、あまり研究されていないようである。開水路網は、自然河川の上、下流部、農業用水路、下水道、運河などに広くみられるが、本研究は、このようなネットワークを対象とした不定流解析の手法について、行なったものである。

2．解析法

(i)単一水路部分　不定流の基礎方程式を、長方形断面の一様水路の仮定のもとで書きなおすと、次式をうる。なお横からの流出入はないものとする。

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(vh)=0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{g}v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}=-\frac{dz}{dx}-\frac{n^2}{R^{4/3}}|v|v \qquad (2)$$

従属変数 h, v は本来、連続量であるが、次式により、区間平均された、離散量にかわる。

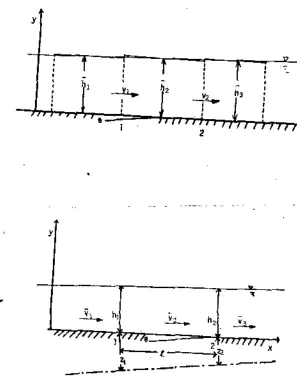
$$\bar{h}=\frac{1}{l}\int_0^l h\,dx, \qquad \bar{v}=\frac{1}{l'}\int_0^{l'} v\,dx \qquad (3)$$

(1), (2)を流下方向について、区間1から2まで積分し、(3)で定義される $\bar{h}$, $\bar{v}$ を用いて、書きなおすと

$$l\frac{d\bar{h}}{dt}+\frac{v_2+v_1}{2}(h_2-h_1)+(v_2-v_1)\bar{h}=0 \qquad (4)$$

$$\frac{l'}{g}\frac{d\bar{v}}{dt}+\frac{1}{2g}(v_2^2-v_1^2)+(h_2-h_1)=-(z_2-z_1)-\frac{n^2 l'}{R^{4/3}}|\bar{v}|\bar{v} \qquad (5)$$

ただし，(4)では，$\bar{h}=(h_1+h_2)/2$ という近似を用いている。



図－1

(ii)分、合流部分　(1), (2)を簡略化した次式を基礎方程式として用いる。

$$\frac{\partial h}{\partial t}+h\frac{\partial v}{\partial x}=0 \qquad (6)$$

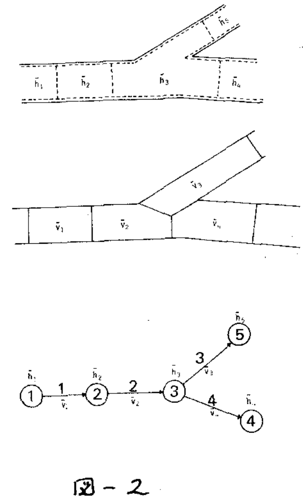
$$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial x}=-\frac{dz}{dx}-\frac{n^2}{R^{4/3}}|v|v \qquad (7)$$

(6)を節点近くで水深一様とみられる領域，すなわち節点貯留能 A について積分する。長方形断面のとき，A は定数となる。また g はシステム外からの流出入流量である。

$$A\frac{d\bar{h}}{dt}+\bar{h}\{\Sigma(b_{out}v_{out}-b_{in}v_{in})\}=g \qquad (8)$$

(7)は(i)と同様に積分される。

$$\frac{l'}{g}\frac{d\bar{v}}{dt}+(h_2-h_1)=-(z_2-z_1)-\frac{n^2}{R^{4/3}}l'|\bar{v}|\bar{v} \qquad (9)$$



図－2

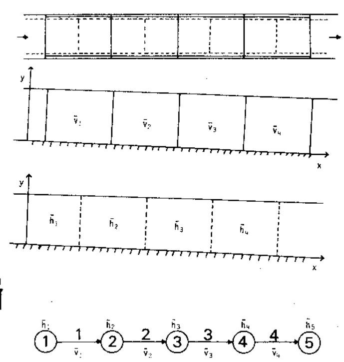
(iii)ベクトル・マトリクスによるシステムの基礎方程式の表示
開水路網の分岐、合流点を節点に、また単一水路部分では，適

当な場所を節点に選んで、節点間を有向枝で結ぶことにより、水路網の有向グラフによる表示が得られる。節点定義量として、上述の区間平均水深$\bar{h}$，枝定義量として、区間平均流速$\bar{v}$を定義すれば、有向グラフの代数的表示法の一つである節点・枝接続行列Aを用いることにより、システム全体について、つぎのような基礎方程式が得られる。

$$SD\mathbf{h}-\frac{1}{2}GBV_1|A|^tA\mathbf{h}+V_2\mathbf{h}=\mathbf{q} \qquad (10)$$

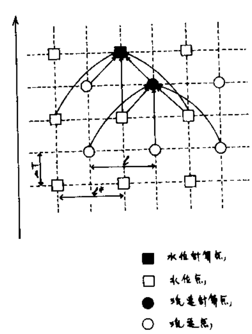
$$\frac{1}{g}LD\mathbf{v}+\frac{1}{2g}FV_3|^tA|A\mathbf{v}-{}^tA(\mathbf{h}+\mathbf{z})+R^{-1}N\cdot L|V|\mathbf{v} \qquad (11)$$

ここに，$V_1=\{\delta_{ij}v_i^1\}$ $\mathbf{v}^1=|A|\mathbf{v}$，$V_2=\{\delta_{ij}v_i^2\}$ $\mathbf{v}^2=AB\mathbf{v}$，$V_3=\{\delta_{ij}v_i^3\}$ $\mathbf{v}^3=|^tA||A|\mathbf{v}-2\mathbf{v}$，$S=\{\delta_{ij}A_i\}$，$B=\{\delta_{ij}b_i\}$，$R=\{\delta_{ij}h_i^{*4/3}\}$，$N=\{\delta_{ij}n_i^2\}$ $L=\{\delta_{ij}l_i\}$，D；時間微分演算子，$\mathbf{h}$；平均水深ベクトル，$\mathbf{v}$；平均流速ベクトル，$\mathbf{z}$；基準面から水路床までの高さを要素とするベクトル，$\mathbf{q}$；システム外から節点へ流出入する流量を要素とするベクトル，F；境界点，分岐点に接続する枝に対してすべての行成分が0，それ以外の枝に対しては，対角成分のみが1で，それ以外の成分が0となる行列，G；境界点分岐点に対しては，すべての行成分が0，それ以外の点に対しては，対角成分のみが1で他の行成分が0となる行列，m；節点数，n；枝数，h^*；平均水深hの枝平均量



図－3

(10)，(11)はtを独立変数，$\mathbf{h}$，$\mathbf{v}$を従属変数とする連立常微分方程式であり，未知変数の数は，$\mathbf{h}$，$\mathbf{v}$がそれぞれm，n個であり，方程式数も(10)がm個，(11)がn個である。また(10)，(11)は非線形連立常微分方程式であり，解析的に解を求めることはむずかしい。数値計算法として，RKG法までの適用が考えられるが，複雑な水路網では，未知変数の数が多くなり，計算時間も増大するので，方程式の形より，その特徴を生かし，つぎのような解法を用いることにする。(右図) (10)を用いて，n時刻の$\mathbf{h}$を求める。第1項を$\frac{1}{2\Delta t}S(\mathbf{h}^n-\mathbf{h}^{n-2})$と差分し，他の$\mathbf{h}$，$\mathbf{v}$としてそれぞれ$n-2$時刻，$n-1$時刻の$\mathbf{h}$，$\mathbf{v}$を用いる。つぎに時刻を$\Delta t$だけ進め，$n+1$時刻の$\mathbf{v}$を(11)より求める。第1項を$\frac{1}{g\cdot 2\Delta t}L(\mathbf{v}^{n+1}-\mathbf{v}^{n-1})$と差分し，他の$\mathbf{h}$，$\mathbf{v}$として，それぞれ$n$時刻，$n-1$時刻の$\mathbf{h}$，$\mathbf{v}$を用いて，近似計算する。計算を始める前に必要な量は水路網の幾何学的な諸量のほかに，初期条件として，$t=-\Delta t$の$\mathbf{v}$，$t=-2\Delta t$の$\mathbf{h}$，および境界条件である。



図－4

3．結語

本研究の方法によれば，節点・枝接続行列を用いることにより，開水路網の連結構造を simbolize して，方程式の中に組みこむことができ，(10)，(11)は水路網の連結構造によらない一般的な方程式である。このことは，電子計算機の利用を考えるうえで有効であると言えよう。また，簡単な開水路網の不定流解析を，本報文で述べた方法を用いて行なったが妥当な結果を得ている。