

アーチの面内弾性座屈荷重に及ぼす座屈前の変形の影響について

(株) 神戸製鋼所 正 ○ 頭井 洋
 “ “ 新家 徹
 “ “ 波田 凱夫

1. まえがき

アーチの面内弾性座屈については古くから多くの研究がみられるが、解析例の多くはアーチ軸線不伸縮の仮定を用いている。また座屈前の変形が座屈荷重に及ぼす影響についてはほとんどその研究例をみない。著者らは、伝達マトリックス法を用いたアーチの面内弾性座屈の汎用解析法を先に報告している¹⁾。今回はこの解法を拡張し、アーチの軸線不伸縮および座屈前の変形は微小であるの二つの仮定を捨てた解析を行なったのでその内容を報告する。

2. 理論解析

解析に用いた主な仮定は、次のとおりである。

- 1) 適当に分割された軸線要素内では、変形前の曲率 K_0 と曲げ剛性 EJ 、伸び剛性 EF は一定である。またこの要素に変形前のアーチ軸に関して法線方向および接線方向に作用する荷重 p および q は要素内軸線上で等分布する。
- 2) 荷重の作用方向とアーチ軸線とのなす角は、座屈の前後で不変である。
- 3) アーチは、軸線方向に伸縮し座屈前の変形は、微小でない。ただしせん断変形の影響は無視できる。

図1 a) に示すように荷重および変位の正方向をとれば、本文で取扱う問題の基礎方程式は、上記の仮定のもとに2次の弾性解析理論より次のように与えられる²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{K_F EF} \left[EJ \{ (K_0 W)' - v'' \} \right]' - W' - K_0 v &= - \frac{q_n}{K_0 EF} \left(1 + \frac{v''}{K_0} - W' \right) \\ \frac{1}{K_F} \{ EF (W' + K_0 v) \}' + \left[EJ \{ (K_0 W)' - v'' \} \right]' &= - \frac{q_t}{K_0} \left(1 + \frac{v''}{K_0} - W' \right) \end{aligned} \right\} (1) a, b$$

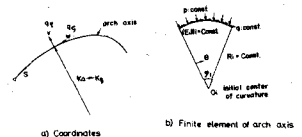


図1 座標系と荷重

図1において v , w はそれぞれ半径方向、接線方向の変位を、 s はアーチ軸線にそった座標を示している。 q_n , q_t はそれぞれ変形後のアーチ軸に関して半径方向、接線方向の荷重を示しており、ここでは仮定2) より $q_n = -p$, $q_t = q$ である。また式(1)で $\langle \rangle$ は s に関する微分を示し K_0 , K_F はそれぞれ変形前、変形後の曲率を表わしている。式(1)で $K_F = K_0$ とおくと右辺の荷重項のみ変形の影響を考慮したことになり線形座屈問題の解を与えることになる。 K_F は曲げモーメントを M 、変形前の曲率半径を $R (= 1/K_0)$ として次のように表わされる²⁾。

$$K_F = K_0 + M/EJ = K_0 (1 + MR/EJ) = K_0 (1 + \tau) \quad (2)$$

$$\text{ここに} \quad \tau = MR/EJ \quad (3)$$

τ は無次元化した曲げモーメントで、本解析ではこの τ が変形の影響を表わすパラメータとなる。すなわち変形の影響を考慮する場合、曲げモーメントが重大な意味をもつこと

かわかる。式(3)を式(1)に代入し、無次元パラメータ $\lambda = PR^2/EJ$, $\mu = \theta R^3/EJ$, $a^2 = R^2F/J$ を用いて整理すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1+\gamma} \frac{d^3w}{d\theta^3} + (\lambda - a^2) \frac{dw}{d\theta} - \frac{1}{1+\gamma} \frac{d^2v}{d\theta^2} - \lambda \frac{d^2v}{d\theta^2} - a^2 v &= \lambda R \\ \left\{ \frac{a^2}{1+\gamma} + 1 \right\} \frac{d^2w}{d\theta^2} - \mu \frac{dw}{d\theta} - \frac{d^3v}{d\theta^3} + \mu \frac{d^2v}{d\theta^2} + \frac{a^2}{1+\gamma} \frac{dv}{d\theta} &= -\mu R \end{aligned} \right\} (4) a, b$$

また、たわみ角を ψ , せん断力を Q , 軸力を N とすると変位と断面力の間には、次の関係がある。²⁾

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{1}{R} \left(\frac{dv}{d\theta} - w \right) & M &= \frac{EJ}{R^2} \left(-\frac{d^2v}{d\theta^2} + \frac{dw}{d\theta} \right) \\ Q &= \frac{1}{R} \frac{dM}{d\theta} & N &= \frac{1}{R(1+\gamma)} \frac{d^2M}{d\theta^2} - \ell \gamma \left(\frac{dw}{d\theta} - \frac{dv}{d\theta^2} \right) + R \ell \gamma \end{aligned} \right\} (5) a, b, c, d$$

式(4)において γ は変位の関数であるが、ここでは簡単化のため定数とみなし式(4)を線形化し解を求めている。この解を式(5)に代入し変位および断面力の解を求め、これらからアーチ要素両端の状態量を関係づける格闘伝達マトリックスが得られる。これより以下の解法は文献1)と同様である。ただ格闘伝達マトリックスの各要素の中に未知量 γ が入っているので、各荷重段階ごとに γ が収束するまで繰返し計算を行なうことになる。

3. 計算例

図2に示したように満載死荷重 W に加え、中央に載荷幅 0.3ℓ および 0.5ℓ の部分分布荷重が載荷した場合の座屈荷重を求め図3に示した。図において $\gamma = 0$ すなわち座屈前の変形の影響を無視した場合の解を線形座屈とし実線で示した。また $\gamma \neq 0$ すなわち座屈前の変形の影響を考慮した場合の解を非線形座屈として破線で示した。図3より図2に示した載荷形式の場合には、変形の影響を考慮すれば、 $P/W = 0.2 \sim 1.0$ の範囲で5~15%危険側の値となっていることがわかる。また当然のことながら座屈前の変形が大きくなるほど ($P/W \rightarrow \infty$) その影響は小さくなっていく。計算例ではすべて $\ell/R = 1/6$, $a = 200$ とした。他の載荷形式についても計算を進めており結果は当日報告したい。本解析では、応力は弾性範囲内にあると仮定したが、座屈直前の変形が大きくなり曲げモーメントが大きくなってくると実際の材料では縁応力度はかなり早期に降伏点に達し、本文の計算結果よりも低い荷重で座屈することは十分予想される。このような非弾性領域も含めた解析も現在進めており機会をあらためて報告したい。

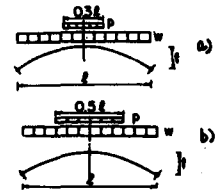


図2 載荷形式

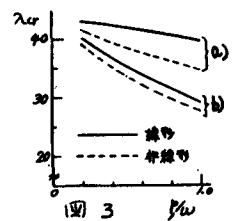


図3

参考文献

- 1) 波田, 新家, 頭井: 伝達マトリックス法によるアーチの面内弾性座屈および2次の応力問題の解析, 土木学会論文報告集, No 224, pp1-11, 1974.4
- 2) Namita, Y: Die Theorie II Ordnung von Krümmen Stäben und ihre Anwendung auf das Kipp-Problem des Bogenträgers, Trans. of J.S.C.E. No 155, 1968