

京都大学工学部 正員 山田善一

同上 同上 竹宮宏和

1. まえがき : 本研究は不規則外力を受ける非線形履歴系のランダム応答解析を扱うものである。これまで耐震工学において、ランダム振動理論から構造物の線形応答解析を行うことが多くの人々によってなされてきているが、強震を受けた場合多くの構造物は弾性限を越え非線形応答を示し、入力エネルギーを履歴エネルギーとして消失する。合理的耐震設計を目指すには、これを的確に把握し、設計変数として積極的に導入する必要がある。本報告は、以前著者の1人が双一次履歴系の等価線形化で試みた手法をより一般的な Masing の仮定を満たす非線形履歴系に拡張したものである。

2. 解析 : 一般に非線形履歴系 (図1) の運動方程式は、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + P(x) = mf(t) \quad (1)$$

$$\text{あるいは} \quad \ddot{x} + 2\beta_0\omega_0\dot{x} + \omega_0^2\phi(x) = f(t) \quad (1')$$

ここで ω_0 は微小振動時の固有振動数、 β_0 はそのときの粘性減衰定数である。いま式(1)'を無次元表示して、 $\mu'' + 2\beta_0\mu' + Q(\mu) = f(t)$ (2) ここで μ は降伏変位 x_y で無次元化した変位 x/x_y を、 $Q(\mu)$ は降伏復元力 $P(x)$ で無次元化した復元力 $P(x)/P_y$ を、記号' は無次元時刻 $\omega_0 t$ での微分を意味する。Masing の仮定を満たす非線形履歴系においては、スケルトン曲線とブランチ曲線とは同一の関数形 $f_n(\cdot)$ で記述される。すなわち

$$\text{スケルトン曲線: } \mu = f_n(Q) \quad \text{ブランチ曲線: } (\mu - \mu_i)/\frac{1}{2} = f_n((Q - Q_i)/\frac{1}{2})$$

例えば、土木構造物によく見られるものとして、

	双一次履歴型 (図2)	Ramberg-Osgood 型 (図3)
スケルトン曲線	$\mu = Q, \mu \leq 1$ $\alpha(\mu \pm 1) = Q \pm 1, \mu > 1, \alpha: \text{降伏比}$	$\mu = \mu + \alpha Q^r$ α : 正定数 r : 正奇数
ブランチ曲線	$(\mu - \mu_i)/\frac{1}{2} = (Q - Q_i)/\frac{1}{2}$, 弾性除荷時 $\alpha(\mu \pm 1) = Q \pm 1$, 弾性限以上の載荷時	$(\mu - \mu_i)/\frac{1}{2} = (Q \pm Q_i)/\frac{1}{2} + \alpha (Q \pm Q_i)/\frac{1}{2} ^r$

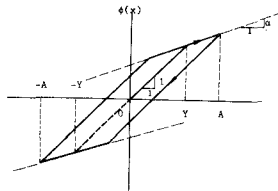


図2 双一次履歴型

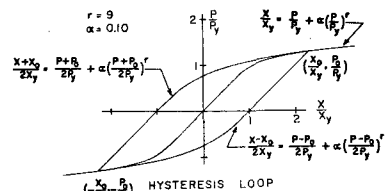


図3 Ramberg-Osgood型

文献(1)では、双一次履歴系を対象にして、その rms 応答予測に入力と消失エネルギー率の一致を考えたが、そこでの消失エネルギー率の算定は履歴1サイクルのエネルギー量から履歴周期で除して行なっている。双一次履歴系の場合は、履歴サイクルは降伏後の剛性に対する固有振動数 $\sqrt{\alpha}\omega_0$ であった。これを一般的な非線形履歴系にも適用できる表現に直

と、ある振幅 μ_i のときの期待履歴サイクルは、 μ_i の勾配剛性に対する固有振動数である。従って、Ramberg-Osgood 型の履歴系に対しては、振幅 μ_i のときの 1 サイクルの履歴エネルギー量は、 $(H.E.) = -2\mu_i \int_0^\pi Q(\mu_i \cos \psi) \sin \psi d\psi = 4\alpha x_g \beta_g \left(\frac{r-1}{r+1} \right) Q_i^{r+1}$ (3)

またそのときの期待履歴周期は、 $T_r = 2\pi / \omega_r = 2\pi / \sqrt{1 + \alpha r Q^{r-1}}$ (4)

となる。いま、外力 $f(x)$ に white noise (強度レベル S_0) を想定すると、入力の期待エネルギー率は、 $m\pi S_0$ となり、入力-消失エネルギー率の一致条件は、粘性減衰が無い場合、

$$\frac{2\alpha}{\pi} x_g \beta_g \omega \left(\frac{r-1}{r+1} \right) \int_0^\infty \frac{Q_i^{r+1}}{\sqrt{1 + \alpha r Q^{r-1}}} P_r(\mu_i) d\mu_i = m\pi S_0 \quad (5) \quad \text{ここで } P_r(\mu_i) \text{ は 振幅 } \mu_i \text{ の確率密度関数である}$$

$P_r(\mu_i)$ に Rayleigh 分布、 $P_r(\mu_i) = \mu_i / \sigma_\mu^2 \cdot \exp(-\mu_i^2 / 2\sigma_\mu^2)$ を仮定して求めた変位 rms 応答を図 4 に示す。ここでは、応答を入力の強度を示す尺度 $N = \sqrt{2S_0} \omega_0 / \omega^2$ で正規化している。線形系においては、応答値は $\frac{\sigma_x}{N} = \frac{\sigma_x / \omega_0}{N} = \frac{1}{Z} \sqrt{\frac{\pi}{\beta_0}}$ (6) となり N に比例的であるが、非線形履歴系においては、応答は x_g / N (あるいは σ_μ) の関数となっている。従って非線形履歴系の等価粘性減衰定数を微小振動時の剛性に対して評価するならば、

$$\beta_{eq} = \frac{\pi}{4} / \left(\frac{\sigma_x}{N} \right)^2 \quad (7) \quad \text{で計算される。本解析の精度をチェックするために、}$$

Hudson の研究結果²⁾を用いる。これは、Ramberg-Osgood 型 ($\alpha=0.1, r=9$) の履歴減衰を評価するのに応答入力のトル図を利用したものである。式(7)での定義と一致する。そして等価粘性減衰定数は $\mu_i = 1 \sim 8$ で 4% 位になっている。これに対応する非線形応答領域として図 4 で $\sigma_\mu = 1 \sim 2$ を選ぶと $\beta_{eq} = 5\%$ となり、Hudson の結果とほとんど一致している。また図 4 には双一次履歴系の応答値も合わせて描いてあるが、上の非線形応答領域では、 $\alpha = 1/2$ の双一次型履歴系とほぼ一致している。

非線形履歴系に粘性減衰が存在したり、あるいは、速度 rms 応答を評価するには、応答平均振動数を予測せねばならないが、これには Slowly varying amplitude を仮定した Krylov-Bogoliubov 法³⁾でかなりの精度が得られることが判かっている¹⁾。

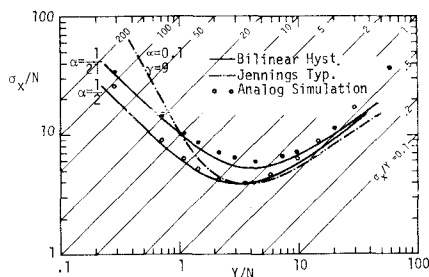


図 4. 変位 rms 応答

参考文献

- 1) 竹宮宏和：不規則外力を受ける双一次履歴系の等価線形化について
土木学会論文報告集 第 219 号 1973 年 11 月 pp1~13
- 2) Hudson, D.E.: Equivalent Viscous Friction for Hysteretic Systems With Earthquake-Like Excitation, Proc. of 3rd WCEE, New Zealand, 1965, Vol.2, pp.185-201
- 3) Caughey, T.K.: Random Excitation of a System With Bilinear Hysteresis, J. Appl. Mech., ASME, Vol.27, pp.649-652