Mixture内に於ける波動伝播問題の解析

京都大学工学部　正員　丹羽義次
京都大学大学院　学生員　矢冨盟祥
新日本製鐵(株)　正員　○倉田豊代次

1.　まえがき　現在迄 弾性体・粘弾性体・弾塑性体等，線型・非線型の両面から様々な方法，種々の見方によって 多くの議論がなされてきたが，これらのうちの大部分のものが 対象とする物質を 単一体的に扱ってきた。理論の分野に この様な傾向が見られる為に 実験の分野でも 実験後の数値的処理を行なう必要上 モデルをやはり単一体として考えなければならないことが 往々にしてあった。最近では 時代の要請の為か この傾向が 幾分変ってきたようである。しかし 複合材料問題が 具体的な問題意識をもって取り組まれ始めてから 日が浅い為に 今だに暗中摸索の感が強い。そこで 本論文では 数多くあるモデルのうちの一つを紹介し それに対する 計算結果を単一体として扱った場合の結果と併せて 示す事にする。（詳細は講演会当日に行なう。）

2、　モデル化　Mixtureの問題を扱う時に 実際の物質を そのまま用いる事は不可能であるから 適当なモデル化を行う必要がある。今から議論するモデルとしては図-1に示す様に 実物のある領域Dをモデル空間の点Pへ写像したものを考える。すなわち点Pは実物の領域Dに含まれている性質を ある割合をもって有していることになる。それ故に，モデルでは ある意味でMixtureの平均的な性質というものが議論される。

3、　諸量の定義　r種の構成要素からなるMixture（図-2）の単位体積を考えて 次の様に 種々の値を定義する。

$V \equiv \sum^{r} V^{(\alpha)}$（体積），　$M \equiv \sum^{r} M^{(\alpha)}$（質量），　$n^{(\alpha)} \equiv V^{(\alpha)}/V$（体積比）

$\rho^{(\alpha)e} \equiv M^{(\alpha)}/V^{(\alpha)}$（有効密度），　$\rho^{(\alpha)} \equiv M^{(\alpha)}/V = n^{(\alpha)} \cdot \rho^{(\alpha)e}$（みかけの密度），

$\rho \equiv M/V = \sum^{r} \rho^{(\alpha)}$

次に Mixtureの単位断面積を考えて 上と同様に 次の量を定義する。

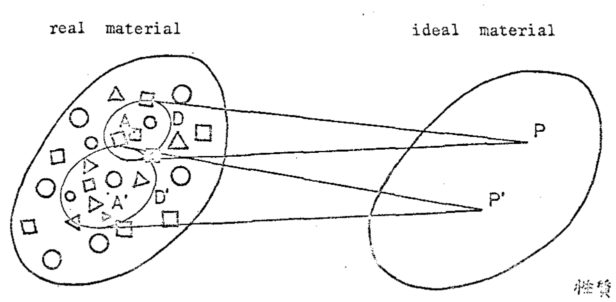


Fig. 1　A Concept of Mapping.

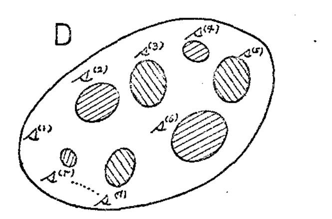


Fig. 2　A Section of Mixture.

$S \equiv \sum S^{(\alpha)}$ （断面積）， $m^{(\alpha)} \equiv S^{(\alpha)} / S$ （断面積比） （ $\sum m^{(\alpha)} = 1$ ），
$F \equiv \sum F^{(\alpha)}$ （表面力）， $\sigma^{(\alpha)e} \equiv F^{(\alpha)} / S^{(\alpha)}$ （有効応力），
$\sigma^{(\alpha)} = F^{(\alpha)} / S = m^{(\alpha)} \sigma^{(\alpha)e}$ （みかけの応力）， $\sigma = \sum^{r} \sigma^{(\alpha)} = \sum m^{(\alpha)} \sigma^{(\alpha)e}$，

4. 保存則 及び 構成式

○質量保存則 $$\frac{D^{(\alpha)} \rho^{(\alpha)}}{Dt} + \rho^{(\alpha)} \frac{\partial v_j^{(\alpha)}}{\partial x_j} = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, r)$$

○運動量保存則 $$\rho^{(\alpha)} \frac{D^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)}}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}^{(\alpha)}}{\partial x_j} + \rho^{(\alpha)} b_i^{(\alpha)} + \rho \beta_i^{(\alpha)} \qquad (\alpha = 1, \cdots, r)$$

$$\sum^{r} \beta_i^{(\alpha)} = 0 \qquad (\ b_i：物体力, \ \beta_i：相互物体力\ )$$

○角運動量保存則 $$\rho \lambda_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(\alpha)} - \sigma_{ji}^{(\alpha)})$$
$$\sum \lambda^{(\alpha)} = 0 \ .$$

○構成式 $$\sigma^{(\alpha)e} (X, t) = \mathcal{F}^{(\alpha)} \{ F^{(\alpha)e} (X, t - \tau) ; -\infty < \tau \leqq t \}$$

$$\begin{cases} F^{(\alpha)e} = \{ n^{(\alpha)} / n_0^{(\alpha)} \}^{1/3} \cdot F^{(\alpha)} & （有効変形勾配テンソル） \\ F_{ij}^{(\alpha)} = \partial x_i^{(\alpha)} / \partial X_j^{(\alpha)} & （変形勾配テンソル） \\ n_0^{(\alpha)}：構成要素 \ s^{(\alpha)} \ の初期状態における体積比 & \end{cases}$$

5. 数値計算

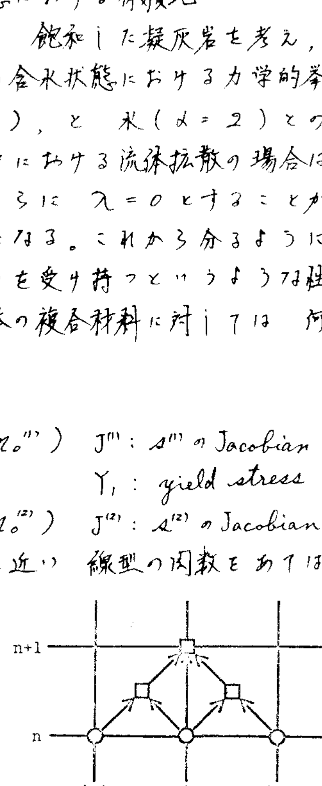
本論文においては実際のモデルとして飽和した凝灰岩を考え，初期条件として一方の境界で数種の速度波形を入れ，任意の含水状態における力学的挙動をもとめた。複合材料の構成要素は乾燥した凝灰岩（$\alpha = 1$），と水（$\alpha = 2$）との二種類である。そこで このような多孔質または他の流体中における流体拡散の場合は，相互物体力 β_i は速度差に依存する拡散抵抗とみなされ さらに $\lambda = 0$ とすることが出来るので みかけの応力は $\sigma_{ij}^{(\alpha)} = \sigma_{ji}^{(\alpha)}$ となって対称になる。これから分るように，各構成要素が互いに連繋して骨組構造的なものを構成し 力を受け持つというような性質を示す式なり項なりは 陽な形では入ってこないので 固体の複合材料に対しては 何らかの補正が必要である。

実際の計算に用いた構成式は

凝灰岩 { 弾性 $\sigma^{(1)} = - n^{(1)} P_1 (n^{(1)} J^{(1)} / n_0^{(1)})$ $J^{(1)}$：$s^{(1)}$ の Jacobian
塑性 $\sigma^{(1)} = - n^{(1)} Y_1$ Y_1：yield stress

水 $\sigma^{(2)} = - n^{(2)} P_2 (n^{(2)} J^{(2)} / n_0^{(2)})$ $J^{(2)}$：$s^{(2)}$ の Jacobian

であり P_1，P_2 は実験により得られた関数を用いたり それに近い 線型の関数をあてはめたりして用いた。計算方法としては 2-Step Lax-Wendroff 法を用いた。この方法は 右図に示す様に，二次の精度を有し 人工粘性項を導入する事により ステップ波等も 容易に解き得る。



Two-step Lax-Wendroff Method.

6. 参考文献

Garg, S. K., " Wave Propagation Effects in a Fluid-Saturated Porous Solid ", Jour.Geo.Res., vol.76, No.32, pp.7947-7962,1971.

Morland, L. W., " A Simple Constitutive Theory for a Fluid-Saturated Porous Solid ", Jour.Geo.Res., vol.77, No.5, pp.890-900, 1972.