

吊橋振動解析の一解法

大阪大学工学部 正 員 前田幸雄

大阪大学工学部 正 員 林 正

大阪大学大学院 学生員 前田研一

大阪大学工学部 学生員 内田雅夫

1. まえがき 現在の吊橋設計においては 初期設計段階での試算には撓度理論による解法を用い、最終的な設計形状および断面に対しては有限変形理論による解を用いるという方法が行なわれているようである。変断面橋剛桁を有する吊橋の撓度理論による振動解析法としては 基礎微分方程式を差分展開する方法が考えられるが、等断面橋剛桁の場合のRitz法に比して、計算容量、時間が増大し、簡易試算計算法としての価値が半減することは避けられない。本文では 撓度理論による塔の変形を考慮した変断面橋剛桁を有する三径間吊橋の鉛直たわみ固有振動における新たな計算法を提案し、同時に、各種の数値計算例を用いて、本文に示す有限変形理論の計算法による結果と比較、検討する。

2. 撓度理論による解法¹⁾ 図-1に示すように、主径間、側径間が m, n 区間に分割される変断面橋剛桁を有する三径間吊橋を考える。主径間、側径間の第 i 区間の諸量にそれぞれ、添字 m_i, s_i を付すことにすると、まず、各区間における振動モードの一般解は 死荷重時のケーブル水平張力 H_w 、および、主径間、側径間の付加水平張力 $h+\delta h$, h を用いて、

$$\eta_{si} = A_{si} \cos \mu_{si} \frac{x_{si}}{l_{si}} + B_{si} \sin \mu_{si} \frac{x_{si}}{l_{si}} + C_{si} \cosh \nu_{si} \frac{x_{si}}{l_{si}} + D_{si} \sinh \nu_{si} \frac{x_{si}}{l_{si}} + \frac{g}{\omega^2 H_w} \quad (1)$$

$$\eta_{mi} = A_{mi} \cos \mu_{mi} \frac{x_{mi}}{l_{mi}} + B_{mi} \sin \mu_{mi} \frac{x_{mi}}{l_{mi}} + C_{mi} \cosh \nu_{mi} \frac{x_{mi}}{l_{mi}} + D_{mi} \sinh \nu_{mi} \frac{x_{mi}}{l_{mi}} + \frac{g}{\omega^2 H_w} (1 + \frac{\delta h}{h}) \quad (2)$$

なる式で与えられる。ここで、 μ, ν は各区間の断面諸量および、円振動数 ω によって決定される量である。ただし、上式の定数項は逆対称振動に対しては不要である。さらに、主径間中央の第 m 区間では、対称、逆対称の条件よりそれぞれ次の二式を用いる必要がある。

$$\eta_{mm, \text{SYM}} = A_{mm} \cos \mu_{mm} (\frac{1}{2} - \frac{x_{mm}}{l_{mm}}) + C_{mm} \cosh \nu_{mm} (\frac{1}{2} - \frac{x_{mm}}{l_{mm}}) + \frac{g}{\omega^2 H_w} (1 + \frac{\delta h}{h}) \quad (3)$$

$$\eta_{mm, \text{ASYM}} = B_{mm} \sin \mu_{mm} (\frac{1}{2} - \frac{x_{mm}}{l_{mm}}) + D_{mm} \sinh \nu_{mm} (\frac{1}{2} - \frac{x_{mm}}{l_{mm}}) \quad (4)$$

また、境界条件は次式で与えられる。

$$(\eta_{si})_{x_{si}=0} = 0, (\eta'_{si})_{x_{si}=0} = 0 \quad (5)_{1,2}$$

$$\left. \begin{aligned} (\eta_{si})_{x_{si}=l_{si}} &= (\eta_{s(i+1)})_{x_{s(i+1)}=0} \\ (\eta'_{si})_{x_{si}=l_{si}} &= (\eta'_{s(i+1)})_{x_{s(i+1)}=0} \\ (\eta''_{si})_{x_{si}=l_{si}} &= (\eta''_{s(i+1)})_{x_{s(i+1)}=0} \\ (\eta'''_{si})_{x_{si}=l_{si}} &= (\eta'''_{s(i+1)})_{x_{s(i+1)}=0} \end{aligned} \right\} \quad (i=1, n-1) \quad (6)_{3 \sim 4}$$

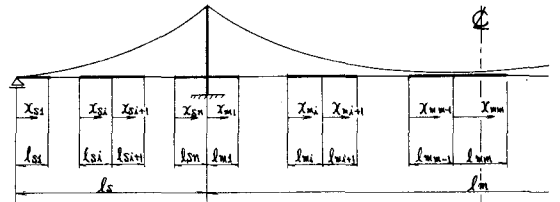


図-1

$$\left. \begin{aligned} (\eta_{sn})_{x_{sn}=l_{sn}} &= 0, (\eta_{ms})_{x_{ms}=0} = 0, (\eta'_{sn})_{x_{sn}=l_{sn}} = (\eta'_{ms})_{x_{ms}=0}, (\eta''_{sn})_{x_{sn}=l_{sn}} = (\eta''_{ms})_{x_{ms}=0} \quad (\text{連続支持}) \\ \text{あるいは, } (\eta_{sn})_{x_{sn}=l_{sn}} &= 0, (\eta_{ms})_{x_{ms}=0} = 0, (\eta'_{sn})_{x_{sn}=l_{sn}} = 0, (\eta'_{ms})_{x_{ms}=0} = 0 \quad (\text{単純支持}) \end{aligned} \right\} \quad (7)_{1 \sim 4}$$

$$\left. \begin{aligned} (\eta_{mi})_{x_{mi}=l_{mi}} &= (\eta_{m(i+1)})_{x_{m(i+1)}=0}, (\eta'_{mi})_{x_{mi}=l_{mi}} = (\eta'_{m(i+1)})_{x_{m(i+1)}=0} \\ (\eta''_{mi})_{x_{mi}=l_{mi}} &= (\eta''_{m(i+1)})_{x_{m(i+1)}=0}, (\eta'''_{mi})_{x_{mi}=l_{mi}} = (\eta'''_{m(i+1)})_{x_{m(i+1)}=0} \end{aligned} \right\} \quad (i=1, m-2) \quad (8)_{1 \sim 4}$$

$$\left. \begin{aligned} (\eta'_{mm-1})_{x_{mm-1}=l_{mm-1}} &= (\eta'_{mm})_{x_{mm}=0}, (\eta'_{mm-1})_{x_{mm-1}=l_{mm-1}} = (\eta'_{mm})_{x_{mm}=0} \\ (\eta'''_{mm-1})_{x_{mm-1}=l_{mm-1}} &= (\eta'''_{mm})_{x_{mm}=0}, (\eta'''_{mm-1})_{x_{mm-1}=l_{mm-1}} = (\eta'''_{mm})_{x_{mm}=0} \end{aligned} \right\} \quad (9)_{1 \sim 4}$$

従って、(1)~(4)式を(5)~(9)式に代入すると、対称、逆対称振動に対して、それぞれ、

$$F_{sym} \cdot a = b + \frac{\Delta h}{\lambda} b' \quad (10)$$

$$F_{asm} \cdot a = 0 \quad (11)$$

なる振動モードの積分定数 a に対する $\{4(m+n)-2\}$ 元の連立方程式が得られる。ここに、 F は図-2に示すような内容の正方形行列であり、対称、逆対称の相違は小行列 B に現われる。逆対称振動については、(11)式から、直接的に、

$$|F_{asm}| = 0 \quad (12)$$

なる振動数方程式が得られる。さらに、対称振動についてであるが、まず、各径間におけるケーブル方程式に(1)~(4)式を代入すると次式のようになる。

$$g_s^T a + k_s = \delta \frac{\Delta h}{\lambda}, \quad g_m^T a + k_m (1 + \frac{\Delta h}{\lambda}) = -2\delta \frac{\Delta h}{\lambda} \quad (13)_{1,2}$$

ここに、 δ は単位水平荷重による塔頂の変位を表わす。そこで、(10)式より、

$$g_s^T F_{sym}^{-1} \cdot b + k_s = (\delta - g_s^T \cdot F_{sym}^{-1} \cdot b) \frac{\Delta h}{\lambda}, \quad g_m^T F_{sym}^{-1} \cdot b + k_m = -(2\delta + k_m + g_m^T \cdot F_{sym}^{-1} \cdot b) \frac{\Delta h}{\lambda} \quad (14)_{1,2}$$

となる。故に、上の二式を連立させ、 $\Delta h/\lambda$ の項を消去すると求める振動数方程式を得る。

$$\frac{g_s^T F_{sym}^{-1} \cdot b + k_s}{\delta - g_s^T \cdot F_{sym}^{-1} \cdot b} + \frac{g_m^T F_{sym}^{-1} \cdot b + k_m}{2\delta + k_m + g_m^T \cdot F_{sym}^{-1} \cdot b} = 0 \quad (15)$$

3.有限変形理論による解法 有限変形理論における接線剛性行列 $\hat{K}(u)$ は図-3のようにある変形状態の部材座標系に無応力状態を想定し、それからの変形量を用いると、

$$u_b - u_a = \Delta l, \quad v_b - v_a = 0 \quad (16)$$

ゆえ、無応力長 l_0 、伸縮量 Δl 、接線回転角 α, α_0 およ α_0 、断面諸量によつて決定されることになる。吊橋の主ケーブルが等分布死荷重に対して、所定のサグを有する放物線形状となり、その張力の水平成分が各径間で等しいとすると、主塔、主ケーブルの軸力分布が解り、従つて、逆算によつて $\Delta l, l_0$ を求めることができる。また、 α, α_0 は明らかに零である。故に、これらの量を用いて $\hat{K}(u)$ を作れば、死荷重載荷時の補剛析無応力状態の条件を満たす固有値問題が全体構造系について次式のように与えられる。

$$|\hat{K}(U) - \omega^2 M| = 0 \quad (17)$$

4.数値計算例 計算結果の一部として、南備讃瀬戸大橋計画設計断面を用いた結果を表-1に示す。断面変化は $m=7, n=6$ (等価剛性マトリクス)である。

5.まとめ 超越方程式を解くため、初期値によつて左右されるが、計算時間は十数秒であり、計算容量が非常に小さくて済むことから、この方法が十分、実用性のあるものであることが解る。なお、計算には、FACOM 230-75 (京大大型計算機センター)を用いた。

(参考文献)1) Bleich, F. et al.: "The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges" U.S. Gov. (1950)

2) 前田, 林, 中村: "半剛性組構造物の大変形解析の加速計算法" 土木学会論文報告集 No.223 昭和49年3月

3) 林, 保田: "吊橋の振動解析" 土木学会第28回年次学術講演会講演概要

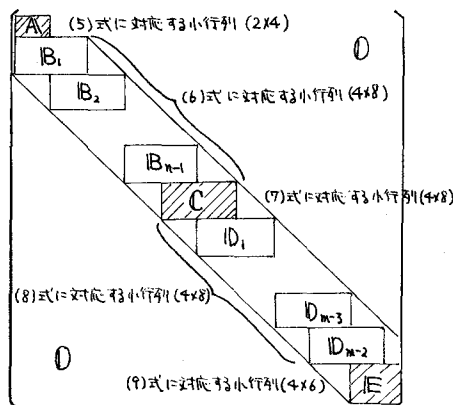


図-2

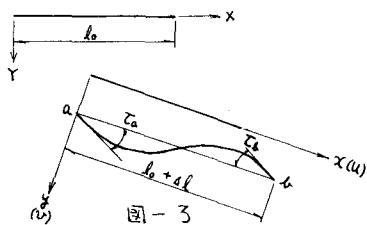


図-3

表-1 固有周期 (SEC)

	摂動理論		有限変形理論		
	本文の法	差分法 ³⁾	橋軸方向移動拘束	橋軸方向回転拘束	補剛(トラス)
対称(一次)	5.98	5.71	5.74	5.74	5.78
対称(二次)	4.93	4.44	4.42	4.41	4.46
逆対称(一次)	7.49	7.68	7.42	7.41	7.42
逆対称(二次)	3.19	3.24	3.21	3.20	3.26