非圧縮性弾性体の応力，変形解析について

京都大学工学部　正員　赤井　浩一
〃　〃　足立　紀尚
〃　〃　○田村　武

1．はじめに　一般に弾性体といった場合、その構成関係からして非圧縮のものを含まないことが多い。Poisson比$\nu \neq 1/2$に対して変位で表現した基本方程式，Navierの式は$\nu = 1/2$で不定項をもち意味を失う。また数値解析上、$\nu = 1/2$に近くなると従来の方法では計算誤差が卓越することも知られている。一方，飽和粘土が非圧縮性弾性体で第1次近似されるなど、工学的にもそのような非圧縮あるいは非圧縮に近い材料を扱うことがしばしばあり，その解析法が重要な問題であった。J. Christian[1]は有効応力の概念を巧みに用いて非圧縮性材料の一解法を提案した。しかし，その手法では$\nu \neq 1/2$で$1/2$に近い材料には適用することができない。それに対して L. Herrmann[2]は$\nu = 1/2$をも含めて任意Poisson比に成立する基礎方程式を導出した。本報告では後者を用いて非圧縮性材料およびそれに近い材料に有効な変分原理より，その数値計算法について述べる。

2．変分原理　L. Herrmannの方法は数学的には体積ひずみθと変位u^iとの関係式、$\theta - u^i|_i = 0$なる制約条件式付きの変分原理に換言することができる。通常の弾性体では，ひずみエネルギーを

$$W = \frac{1}{2}\lambda\theta^2 + \mu\varepsilon^{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\lambda\theta^2 + \frac{\mu}{4}g^{ik}g^{jl}(u_k|_l + u_l|_k)(u_i|_j + u_j|_i) \quad (1)$$

と表わされるが非圧縮性の場合$\lim_{\nu\to 1/2}\lambda\theta < \infty$であることより上式は第1項を省略することでやはり成立する。このことに留意して$\theta - u^i|_i = 0$なる条件を付け，変位u^iとともにθそして乗ずべきLagrange乗数αをそれぞれ独立とみなしてTotalポテンシャルエネルギーを最小にするための停留条件を求めれば，つりあい方程式およびその他の自然条件がでてくる。最小とすべき汎関数は

$$\Pi(u_i,\theta,\alpha) = \int_V \left[\frac{1}{2}\lambda\theta^2 + \frac{\mu}{4}g^{ik}g^{jl}(u_k|_l + u_l|_k)(u_i|_j + u_j|_i) - F_i u^i - \alpha(\theta - u^i|_i)\right]dV - \int_{S_\sigma} T_i u^i dS \quad (2)$$

である。実際，第1変分をとってみると

$$\delta\Pi = \int_V \left[\lambda\theta\delta\theta + \frac{\mu}{2}g^{ik}g^{jl}(u_k|_l + u_l|_k)(\delta u_i|_j + \delta u_j|_i) - F_i u^i - \alpha(\delta\theta - \delta u^i|_i) - \delta\alpha(\theta - u^i|_i)\right]dV - \int_{S_\sigma} T_i \delta u^i dS \quad (3)$$

となり，$\delta u^i|_i$等について部分積分を行い独立な変分についてまとめると以下の停留条件が求まる。

$$\lambda\theta - \alpha = 0 \quad (4) \qquad g^{jk}u_i|_{jk} + g^{jk}u_j|_{ki} + \frac{1}{\mu}\alpha|_i + \frac{1}{\mu}F_i = 0 \quad (5) \qquad \theta - u^i|_i = 0 \quad (6)$$

いま$\frac{\theta}{1-2\nu} = H$とおけば$H = \sigma_m/E$となり$\nu \to 1/2$でも定義される量である．式(4)を変形し

$$\alpha = \lambda\theta = 2\mu\nu\frac{\theta}{1-2\nu} = 2\mu\nu H \quad (7)$$

これを式(5), (6)に代入すると求める基礎方程式が次の2式で表現できる。

$$g^{jk}u_i|_{jk} + g^{jk}u_j|_{ki} + 2\nu H|_i + \frac{1}{\mu}F_i = 0 \tag{8}$$

$$(1-2\nu)\,u^i|_i - H = 0 \tag{9}$$

3. 数値計算法　　式(3)で示した汎関数Πはその停留条件として任意Poisson比に対する基礎方程式を含むが、その停留条件の一部である式(4)をあらかじめ束縛条件としてΠに課しておいても停留条件その他は変わらない。するとΠと等価で独立函数の少ない汎関数$\Pi^*(u_i, H)$が求まる。

$$\Pi^*(u_i,H)=\int_V\left[\mu\left\{\frac{1}{4}g^{ik}g^{jl}(u_k|_l+u_l|_k)(u_i|_j+u_j|_i)+2\nu H u^i|_i-\nu(1-2\nu)H^2\right\}-F^iu_i\right]dV-\int_{S_\sigma}T^iu_i\,dS \tag{10}$$

すなわち、このΠ^*の停留条件は式(8), (9)に一致する。よって、有限要素法で数値計算を行う場合、適当な要素を仮定してΠ^*の積分項を節点変位の関数に改めて剛性マトリックスを求めることができる。本報告では2次元平面ひずみ問題に限定し、一辺を単位の長さにもつ正方形要素を採用した。図-1に示すような矩形領域に対称的な台形荷重をかけ、応力は弾性定数により、変位は要素の1辺の長さによって全て無次元化している。境界条件として左右端はなめらか、下端は完全固定である。$\nu=1/2$のときの変形状態が図-2に示されている。非圧縮条件より各要素は面積を変えることができず、せん断変形のみからなっている。また表面での沈下した面積と上昇した面積も等しい。等方応力成分σ_mは構成関係からは不定であるが境界条件より定まり図-3に示す通りである。図-4には$\nu=0.3$のときの等方応力成分の分布が示されているがνの減少とともにσ_mも小さくなる。次に表面沈下曲線に着目し、ヤング率E一定のもとでνの値をかえると図-5の曲線群になる。代表的な点での沈下量をνに対してプロットすると図-6のようになり、$\nu=1/2$に近いほど変化率が大きいことがわかる。

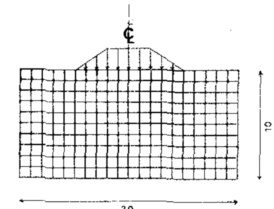

図-1

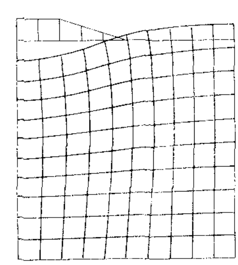

図-2

〔参考文献〕 1) J. Christian "Undrained Stress Distribution by Numerical Method", Proc. ASCE, J. SM&F Dn., Vol 94, SM6. Nov. 1968. 2) L. Herrmann "Elasticity Eqs. for Incompressible & Nearly Incompressible Materials by a Variational Method" AIAA Journal Vol.3 No.10 Oct 1965.

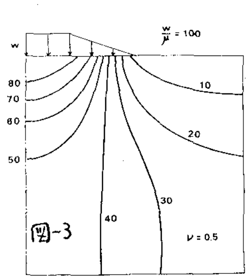

図-3

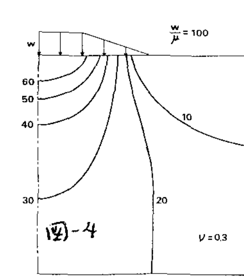

図-4

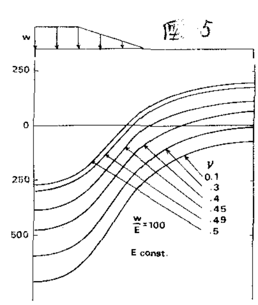

図-5

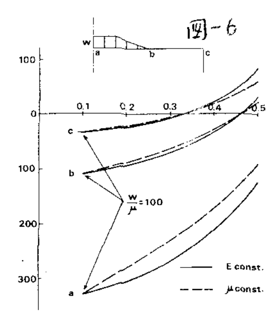

図-6