

大阪工業大学 正員 岡村宏一

1 まえがき: 薄肉曲面板によって構成されるパネルの終局強度は, 土木構造の分野においても関心の持たれる問題の一つであるが, 目下のところ, 平板構造にくらべると研究例も数少ない。その主な理由として, シェルの解析が, 平板の場合より複雑であり, また, 精度上の問題点も多いことが挙げられよう。従来, 解析的手法の面では, 弾性シェルの微小変形に関する厳密な基礎式として著名な Flugge の式, 未知量の消去によって 8 階の基礎式に帰着させる Donnell の演算操作, あるいは, それらの近似化などについて, 多くの人々が論じたが, 一般に解析解の得られる範囲に制約があり, 発展性に乏しい感がある。一方, 数値計算的手法についても, おしなべて平板の場合より精度上の問題点が多く, 有限変形や弾塑性, リブの補剛効果など, 複雑, かつ局所性の強い力学的挙動の連成するこの種の問題の解析にあたっては, 手法論的にも研究課題があるように思はれる。

さて, 筆者はすでに, 平板構造における同様な問題について, 解析的手法と数値計算的手法の両者の持つ特性を相補的に利用できる一つの数値解法を發表し, 若干の応用例によってその有用性を確めてきた。^{1)~3)} この解法の特長は, 連続解(解析解)を基底に置いて精度の向上, ならびに未知量の制約の利便を獲得し, 同時に, 選定法, 部分的差分法の併用によって解の適用範囲を拡張し, 上述のような複雑な問題を高精度で, かつ実用的に解析するところにある。そこで, このような解析上の経験をもとに, 平板の基礎式(4階の釣合式, 適合条件式)の右辺に若干の項を加え, 平板解析の場合と同様の手法を重ねることによって薄肉シェルの同類の問題を精密に解くことを考えた。その意図するところは次のとおりである: 1) 基底に置く解析解(級数解)として平板の解を用いるので, その扱いが容易であり, 選定法の導入にも適している。また, 級数総和法が適用できるので, 断面力の収束値を得るのに便利である。2) 釣合式と適合条件式が同形であり, また, 各式の右辺の各項で与えられる物理量を板内の有限領域で平均化することによって, 同一の解と手法を key として解法を整備することができる。さらに, それぞれの物理量の意味が明確であり, 解析対象によっては近似解を与えることができる。3) 同一のプログラムをシェルと板の双方に適用できる。すなわち, 平板は解法上, シェルの特別な場合になる。

後述の計算例にも示すように, 部分荷重を受ける弾性シェルの問題について, 本解法による結果と, Flugge の式を解いた結果* との比較, ならびに本解法の断面力に関する収束性の検討では十分な精度が認められた。この事実は, 基礎式中, 有限変形や弾塑性挙動によって与えられる物理量が, 線形化によって本質的には局所的な部分荷重と類似の性格を持つことを考慮すれば, 本解法の有用性を示唆するものといえる。

1)~3), 土木学会論文報告集, No. 196, No. 206, 年次大会(S. 48)概要, 1-79 など。

* Flugge の式を 8 階の基礎式に変換し, 級数解法によってたけみと求めて比較した。

部分荷重の場合, この系統の式から断面力の収束値を得るのは困難である。

2. 基礎式；誘導の要旨は次のとおりである。1) 断面力とひずみ，変形の関係は，弾性線形問題における Flugge，溝口らの表示と同様に，有限変形，ならびに弾塑性変形をも考慮して精密に与える。2) 6個の釣合条件式のすべてを充足させる。3) 適合条件式は中央面で充足させ，応力関数を導入する。3) 塑性ひずみは flow rule によって与える。なお，本文では円筒シェルの場合について述べるが，本解法は2方向に曲面を有するものにも拡張することができる。

図-1を参照して， x, s, z 各方向の変位成分を u, v, w とし，内点 (x, s, z) における全ひずみを次のように与える。

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \bar{\epsilon}_s &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{r+z} - \frac{r z}{r+z} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r+z} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \\ \bar{\gamma}_{xs} &= \frac{r}{r+z} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{r+z}{r} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} (z + \frac{r z}{r+z}) + \frac{r}{r+z} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial s}\end{aligned}$$

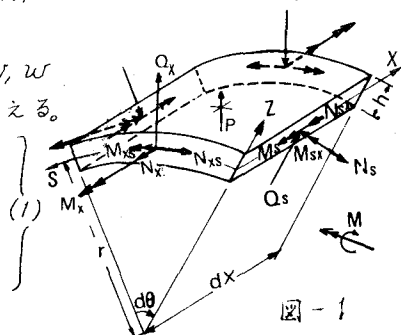


図-1

釣合条件式は

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{sx}}{\partial s} &= 0, \quad \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial x} = \frac{Q_s}{r}, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{sx}}{\partial s} = Q_x, \quad \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial M_{xs}}{\partial x} = Q_s \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_s}{\partial s} &= p - \frac{N_s}{r} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_s \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + (N_{sx} + N_{xs}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}, \quad N_{sx} - N_{xs} = \frac{M_{sx}}{r}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

適合条件式は中央面 ($z=0$) において要求する。ひずみ成分を $\bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_s, \bar{\gamma}_{xs}$ とすれば，

$$\frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_x}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{\gamma}_{xs}}{\partial x \partial s} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \quad (3)$$

内部エネルギーの遷散関数 $\mathcal{U}$ の一般形を次式で表わす。

$$\mathcal{U} = N_p (n_{\alpha\beta} \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta} \bar{\gamma}_{\alpha\beta}) \quad (4)$$

$$\text{こゝに, } n_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{N_p}, \quad m_{\alpha\beta} = \frac{M_{\alpha\beta}}{M_p}, \quad N_p = \sigma_p h, \quad M_p = \frac{\sigma_p}{4} h^2, \quad \sigma_p: \text{降伏応力}$$

以上を考慮して，次の2つの基礎式が得られる。

$$\Delta \Delta W = \frac{p}{K} + \sum_{k=1}^6 U_k \quad (5) \quad \Delta \Delta \phi = \sum_{k=1}^5 V_k \quad (6)$$

$$\text{こゝに, } \Delta \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right)^2, \quad p: \text{横荷重強度}, \quad \phi: \text{応力関数}, \quad K: \text{板剛度} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\begin{aligned}U_1 &= \frac{1}{rK} p_x, \quad U_2 = \frac{1}{rC} D_x p_x - \frac{1}{r^2} (\kappa_s + \kappa'_s + 2\kappa_x), \quad U_3 = \frac{1}{K} (p_s \kappa_x + p_x \kappa'_s - 2p_{xs} \kappa_{xs}), \\ U_4 &= \frac{1}{r} \{ [\kappa_s + (2-\nu)\kappa'_s] \kappa'_s - (1-\nu)\kappa_{xs}^2 \}, \quad U_5 = -\frac{4}{r} \sum_L [D_x \{ \mu(\chi_x + \nu\chi_s) + D_s \{ \mu(\chi_s + \nu\chi_x) \} \\ &+ (1-\nu)D_{xs}(\mu\chi_{xs}) \}_L], \quad U_6 = \frac{4}{rK} \sum_L \{ \mu \{ \chi_s + (2-\nu)\chi_x \} \kappa'_s - \frac{1}{2}(1-\nu)(\mu\chi_{xs})\kappa_{xs} \}_L \\ V_1 &= \frac{Eh}{r} \kappa_x, \quad V_2 = -\frac{2K(1-\nu)}{r} (D_x + D_s) \kappa_x, \quad V_3 = Eh(\kappa_{xs}^2 - \kappa_x \kappa'_s), \\ V_4 &= -Eh \sum_L \{ D_s(\mu\omega_x) + D_s(\mu\omega_s) - D_{xs}(\mu\omega') \}_L, \quad V_5 = -\frac{8K(1-\nu)}{rK} \sum_L \{ (D_x + D_s)(\mu\chi_x) \}_L\end{aligned}$$

$$\text{また, } p_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad p_s = \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}, \quad p_{xs} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial s}, \quad \kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa'_s = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \kappa_s = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{w}{r^2}$$

$$\kappa_{xs} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}, \quad \chi_x = \frac{\partial f}{\partial m_x}, \quad \chi_s = \frac{\partial f}{\partial m_s}, \quad \chi_{xs} = \frac{\partial f}{\partial m_{xs}}, \quad \omega_x = \frac{\partial f}{\partial n_x}, \quad \omega_s = \frac{\partial f}{\partial n_s}, \quad \omega' = \frac{\partial f}{\partial n'},$$

$n' = \frac{1}{2}(n_{xs} + n_{sx})$, $C = \frac{Eh}{1-\nu^2}$, f : 塑性ポテンシャル, μ : 塑性ひずみの係数,
 L : 荷重段階, D は部分的に使用される差分記号で, $D_x = \frac{\Delta^2}{\Delta x^2}$, $D_s = \frac{\Delta^2}{\Delta s^2}$, $D_{xs} = \frac{\Delta^2}{\Delta x \Delta s}$

断面力は次のように書かれる

$$\left. \begin{aligned} N_x &= p_s, \quad N_s = p_x + \frac{K}{r} \{K_s + (2-\nu)K_x\} + \frac{4K}{r^2} \sum_L \{ \mu \chi_s + (2-\nu) \chi_x \}_L, \quad N_{sx} = -p_{xs}, \\ N_{xs} &= -p_{xs} - \frac{K}{r} (1-\nu) K_{xs} - \frac{2K}{r^2} (1-\nu) \sum_L (\mu \chi_{xs})_L, \quad M_x = K(K_x + \nu K_s - \frac{N_x}{rC}) + \frac{4K}{r} \sum_L (\mu \chi_x + \nu \chi_s)_L, \\ M_s &= K(K_s + \nu K_x) + \frac{4K}{r} \sum_L (\mu \chi_s + \nu \chi_x)_L, \quad M_{sx} = M_{xs} = K(1-\nu) K_{xs} + \frac{2K}{r} (1-\nu) \sum_L (\mu \chi_{xs})_L \end{aligned} \right\} \text{---(7)}$$

基礎式(5), (6)の右辺 U_k, V_k の各項の性格にもとづき, それらを取捨選択して, 下表のように, 種々の解析結果に対応させることができる。

表. 解析対象による U, V の分類 (*微小変形, **有限変形, ***弾塑性)									
解析対象	平板*	シェル* (近似解)	シェル* (精密解)	平板**	シェル** (近似解)	シェル** (精密解)	平板***	シェル*** (近似解)	シェル*** (精密解)
式(5)	0	U_1	$U_{1\sim 2}$	U_3	U_1, U_3	$U_{1\sim 4}$	U_3, U_5	U_1, U_3, U_5	$U_{1\sim 6}$
式(6)	0	V_1	$V_{1\sim 2}$	V_3	V_1, V_3	$V_{1\sim 3}$	V_3, V_4	V_1, V_3, V_4	$V_{1\sim 5}$

ここで, シェルの近似解と呼ぶものは, 弾性ひずみ分布に Donnell の近似仮定を用いたものであり, 問題によっては実用的に十分な解が得られる。

3. 解法: 式(5), (6)を解く場合, 物理量 U_k, V_k は, 図-2にみるように, 分割された有限領域(i, j など)においては一定値(等分布)として扱い, 各領域の中心点(選点)の値を用いる。そこでこの場合, 式(5), (6)の W, ϕ, p, U, V を2重級数

$$\sum_m \sum_n R_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} s$$

の形に展開すると, 板内各点(選点)の変位, 断面力に関する各領域における U_k, V_k の単位の量の影響係数は, 同一の基本解(Navierの解)によって容易に与えられる。

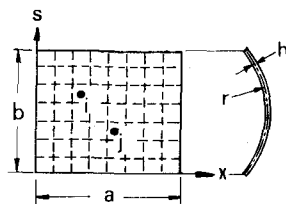


図-2

1) シェルの解(近似解*); 表により U_1, V_1 を考慮すると

基礎式は
$$\Delta \Delta W = -\frac{1}{rK} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \Delta \Delta \phi = \frac{Eh}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \text{---(8)}$$

上述の影響係数(下記 C_{ij}, C_{ij}'' など, 収束値)を用いて選点 i における解を得る。

$$W_i = \frac{1}{K} C_{ij} p_j - \frac{1}{Kr} \sum_j C_{ij} (p_x)_j, \quad \phi_j = \frac{Eh}{r} \sum_i C_{ji} (K_x)_i \text{---(9)}$$

(9)の各式を微分して $(\frac{\partial^2}{\partial x^2}) (K_x)_i, (p_x)_j$ の式を作り, $(p_x)_j$ を消去して整理すると,

$$(K_x)_i + \frac{Eh}{Kr^2} \sum_j C_{ij}'' \sum_l C_{jl}'' (K_x)_l = \frac{1}{K} C_{it}'' p_t \text{---(10)}$$

(10)は各有限領域における選点 i に1自由度の未知量 $(K_x)_i$ を持つ連立方程式であり, $(K_x)_i$ が求まれば, (9)により ϕ , さらに W が求まる。このようにして各有限領域の部分荷重 p_t によるすべての諸量が求まる。一方, 式(5), (6)のその他の項 $U_{2\sim 6}, V_{2\sim 5}$ がいずれも部分荷重に関連した性格を持つことに留意すれば, (10)はその基本解となる。

2) シェルの解 (精密解^{*}) ; 必要があればさらに U_2, V_2 の項を考慮し, 1) で求めた近似解によってその仮定値を与え, 繰返し計算によって W を修正して精密解が得られる。若干の例題による経験によれば, この計算はすみやかに収束する。

3) シェルの解 (有限変形^{**}) ; 有限変形の場合は, 荷重を漸増させ, U_3, V_3 (精密解の場合は U_3+U_4, V_3+V_4) を考慮して, 同様に繰返し計算により収束値を求める。

4) シェルの解 (弾塑性^{***}) ; 荷重を漸増させ, さらに U_5, V_5 (精密解の場合は U_5+U_6, V_5+V_6) を考慮し, 塑性化した各点で降伏条件 ($f=0$) を満足するように μ を定めながら繰返し計算によって収束値を求める。この計算の方法はすでに平板に関して発表した前論文^{1),2)} の手法と同様である。

5) 平板の解 ; 前表にみるように, U, V のうちシェルの特性に因与する項を除去すれば平板の解が得られる。また, シェルの場合, 実用上近似解で十分な場合も多く, この場合は 1) の操作を除いては平板の場合と全く同様である。

6) 境界条件に対する適用性の拡張 ; すでに平板の場合で示したように, 境界選定法が併用できる。この場合, 必要に応じ補足解として Lévy 解が用いられる。

4 計算例 : 本解法の妥当性を検証するため, まえがきで述べたような若干の基本的例題について検討を行なった。紙面の都合でその一部を掲げて説明する。

データは部分荷重を受ける弾性微小変形のもので, 境界条件は $M_x=M_s=N_x=N_s=0, W=0$ の場合である。表-1 のように有限領域のある程度小さくすれば解は収束する。また表-2 にみるように本解法の精度は高い。図-3 は, 問題により近似解, 精密解の使いわけが必要なことを示している。なお, 目下多面的に研究を続行中であり, 機会を見て発表したい。

表-1 有限領域の分割数と解の収束性

a/r	分割数		$X=0.5a, S=0.5S_0$				
	S方向	X方向	$N_x(xqr)$	$N_s(xqr)$	$M_x(xqr^2)$	$M_s(xqr^2)$	$W(xqr^4/D)$
1	5	5	0.309	0.440	0.00290	0.00346	0.0000779
	11	11	0.287	0.434	0.00329	0.00378	0.0000764
10	9	11	0.793	0.406	0.00330	0.00584	0.000647
	9	13	0.614	0.409	0.00331	0.00599	0.000728
	11	19	0.608	0.410	0.00332	0.00603	0.000733

表-2

a/r	$W_{max} (\times 10^3 qr^4/D)$	
	精密解	Flügge
1	0.0764	0.0759
5	0.229	0.222
10	0.733	0.719

