

ひびわれを考慮した補剛版の3次元解析

大阪工業大学

正員 岡村宏一

東洋技研コンサルタント

正員 〇島田 功

1. まえがき: 筆者はすでに桁向長に対して、厚さの比率の大きい、スラブ構造の応力分布について、理想化されたモデルとして、両面固定の場合を選び、杖負を等方弾性体と仮定したうえで、3次元解析による1つの基本的データを与えた。¹⁾ もちろん、コンクリート構造のような複合材においては、内蔵される鉄骨や、鉄筋のもつ不均質性、さらにコンクリートのひびわれ、ならびに非線形な挙動などの影響について、今後の研究が必要である。ところで、この種の研究に関する数値的取扱いとして、有限要素法によるもの²⁾が見受けられるが、筆者も、既に不均質性、弾塑性性、ひびわれ現象、等を Mindlin 解の線形化した重ね合せにより、連続解を基底にした高精度の1数値解法^{2,3)}を提案してきた。本研究は、これらの解法を応用し、標記の構造物の力の流れ、および、ひびわれによって生じた内部応力の再配分の様子を知り、耐荷力の検討を行なうものである。すなわち、内蔵される補剛杖は、とりまき母体とともに変形し、母体は引張りに対し、引張限界⁴⁾までは弾性的であり、この引張限界に達するとひびわれが発生し応力の再配分が行なわれるものとする。また、せん断すべりに対しては、Drucker により提案された塑性理論に従うものとして解析する。さらに1つの解析上の仮定として前論文^{2,3)}でも用いたように、基礎式中におけるひびわれ、降伏に関連する物理量は、有限小領域において、平均値を持つものとし、有限小領域内に設けられた、選点における応力によって評価する。

2. 解法: 母体はひびわれが発生するまで、等方弾性体と仮定され、その弾性マトリックスを D_c とする。また母体と補剛杖間のすべりはないものとし、補剛杖のある有限領域の合成された弾性マトリックスを次のように与える。

$$D = D_c + D_s \text{ ----- (1)}$$

ここで

$$D_s = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

補剛杖の含有率による
異方性の弾性マトリックス

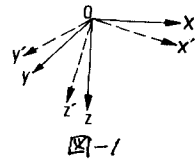


図-1

1) 島田, 岡村: "厚い長方形スラブの応力と変形" 土木学会論文報告集投稿中

2) 岡村, 島田: "弾塑性もしくは不均質弾性を有する3次元体の1数値解法"

土木学会論文報告集 No. 212, 1973, 4, PP. 11~24

3) 岡村, 島田: "ひびわれを有する不均質3次元体の1数値解法"

第28回年次学術講演会概要 I 1973, 10, PP. 41~43

4) Schnolrich, W.C., et al., "Finite element analysis of reinforced concrete" ASCE Vol. 99, ST10, Proc. Oct., 1973, PP. 2109~2122

(1) 母体のひびわれ現象の解析：各選点における母体の応力に対し、長年方程式の実根として与えられる主応力 $\{\sigma_i\}_c$ ($i=1,2,3$) を求め、その中の1つが引張限界 σ_{tc} に達したとし、その方向を図-1の傾斜した座標系 $x'-y'-z'$ の x' 方向とすると、その方向の $(\sigma_x)_c$ に抵抗しない。また $(\tau_{xy})_c$, $(\tau_{zx})_c$ に対する抵抗が緩和されるような材料に母体は変化する。そのようなモデルとして、座標系 $x'-y'-z'$ に対応する任意のひずみ $\{\epsilon\}$ に対し、 $(\sigma_x)_c$ が0となり、(弾性マトリックスのある行と列の要素が0となる。) また、上記のせん断応力に対応するせん断弾性係数が半減するように $\{D_c\}$ D_c'' $\{\epsilon\}$ で表わされる弾性マトリックスを変換する。このような変換を行ない、元の座標系にもどすと、

$$\{\sigma\}_c = [L]^{-1} [D_c''] [K] \{\epsilon\} = [D_c''] \{\epsilon\} \text{ ----- (2)}$$

ただし $[K]$, $[L]$ は座標変換マトリックスである。

これは、ひびわれによって、母体の1部が変化した応力-ひずみ関係を x, y, z 座標に対応して定めたものである。したがって、補剛材のある有限領域の合成される弾性マトリックスは、

$$D_{cr}'' = D_c'' + D_s \text{ ----- (3)}$$

また、このひびわれが閉じれば、母体は、もとの材料に回復するものとする。

(2) 母体のせん断すべりの解析：解法上の仮定として、母体は、弾完全塑性体とし、応力とひずみの関係は *flow rule* に従うものとする。

さて、全ひずみ変化速度 $\{\dot{\epsilon}\}$ は、弾性、および塑性成分 $\{\dot{\epsilon}_e\}$, $\{\dot{\epsilon}_p\}$ からなるものとし、次のようにあらわされる。

$$\{\dot{\epsilon}\} = \{\dot{\epsilon}_e\} + \{\dot{\epsilon}_p\} = [D]^{-1} \{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\epsilon}_p\} \text{ ----- (4)}$$

いま、降伏条件を塑性ポテンシャル f とすれば、 $\{\dot{\epsilon}_p\}$ は *flow rule* により、

$$\{\dot{\epsilon}_p\} = \mu \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \text{ ----- (5)}$$

μ ：塑性変形中変化するスカラー量

したがって、式(4)より

$$\{\dot{\sigma}\} = [D] \{\dot{\epsilon}\} - [D] \mu \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \text{ ----- (6)}$$

さらに0から t までの時間積分をおこなう。また時間積分の項 $\int_0^t [D] \mu \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} dt$ を荷重段階 j の和に置換すれば、

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} - \sum_j [D] \mu \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \text{ ----- (7)}$$

さて、本文では、降伏条件として *Drucker* の式を用いた。
すなわち

$$f = |\tau| + \eta \sigma - \tau_0 = 0 \text{ ----- (8)}$$

式中、 η , τ_0 は材料定数であり、それぞれ、内部摩擦係数、母体のせん断強度である。

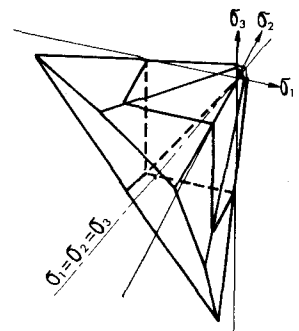


図-2 降伏曲面

ここで、最大、最小主応力 σ_1, σ_3 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) を用いて書き改めると

$$f = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} (\eta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \frac{\eta}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) - t_0 = 0 \quad \text{----- (9)}$$

ところで、式(9)に示されるDは、ひびわれが発生している有限領域では、ひびわれによる弾性マトリックスの変換を、また補剛材のある有限領域では、補剛材による弾性マトリックスをも考慮したものであり、以下の解法では、これらの影響も同時に含まれる。

さて、一般に3次元問題において、解の見出されている基本的なCaseは、等方弾性体の場合で、その基本となる弾性マトリックスを D_0 とすると、両者の偏差は、ひびわれの状態、および補剛材によって、各有限領域で異なるが、それを一般に ΔD とすると、式(7)は、次のようになる。

$$\{\sigma\} = [D_0]\{\epsilon\} + [\Delta D]\{\epsilon\} - \sum_j \{[D]\mu \frac{\partial f}{\partial [\sigma]}\}_j \quad \text{----- (10)}$$

そこで、補剛材による強化、および母体のひびわれ、ならびに弾塑性状態にある領域での釣合式は

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial z \partial x} \right) + G_0 \nabla^2 u &= \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^*}{\partial z} (= -X) \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 v &= \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} (= -Y) \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial w}{\partial z^2} \right) + G_0 \nabla^2 w &= \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y} (= -Z) \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (11)}$$

$$\text{また、} \{\sigma^*\} - [\Delta D]\{\epsilon\} - \sum_j \{[D]\mu \frac{\partial f}{\partial [\sigma]}\}_j \quad \text{----- (12)}$$

式(11)の右辺の項は式(12)からもわかるように、補剛材ならびに母体のひびわれ、および、塑性変形に従属する項で、Body Force (X, Y, Z) と同じ性格を持つ。ここで、まえきでも示したように、補剛材および母体のひびわれによる剛性変化を持つ領域、また塑性化した領域 R で考慮されべき物理量 (X_R, Y_R, Z_R) は、その点を中心とした有限な小領域 ($V_R (\Delta x \times \Delta y \times \Delta z)$) 内で均一な分布をもつものとみなし、これらのBody Force による任意点のひずみ、および変位は、図-3のように、Mindlin 解を、この容積に3重積分することによって得られる。ところで、この X_R, Y_R, Z_R は、式(11), (12)にみられるように、ひずみ $\{\epsilon\}$ 、塑性スカラー量 μ 等を含んだ $\{\sigma^*\}$ を1次微分したものである。そこで、 X_R, Y_R, Z_R を線形化するため、前論文¹⁾と同様に、差分法が用いられ、補剛材により強化された有限領域、および、母体のひびわれによる剛性の変化する領域、においては $\{\epsilon\}$ 、また母体の塑性化した点では μ に関する1次関数の形で、Body Force X_R, Y_R, Z_R が与えられる。したがって、これらの領域では、荷重段階の各時点では、 $\{\epsilon\}$ 、および μ が未知量となり、各領域の選点で、 ϵ については、ひずみの条件、また μ については降伏条件により形成される

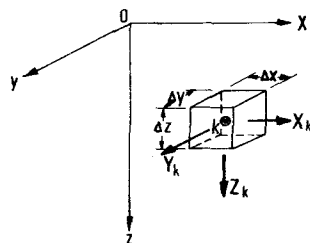


図-3 有限小領域

連立方程式の解として定まる。よって、各領域で評価されねばならない X_R, Y_R, Z_R が求まり、これらの Body Force を作用させて、任意点のひずみおよび変位が得られる。さらに、外荷重によるひずみおよび変位 (Boussinesq, Cerruti の解を積分したもの。) および、前論文¹⁾でも示したように、Integral Method に属する境界調整法により求めたそれらを重ね合わせることにより、荷重段階の各時点での、ひずみ、変位、さらに応力が求まる。

3. 逐次計算の方法：まず、各有限領域の補剛効果による剛性変化を考慮した3次元弾性問題としての解析を境界調整とともにおこない、荷重増分 ΔP に対する、各点の応力増分 $\Delta \sigma$ 、ならびにひずみおよび変位増分 $\Delta \varepsilon, \Delta u$ を計算する。さらに各選点における、母体のひびわれ、および降伏条件を照査し、弾性限界荷重ならびに各点の σ, ε, u などを計算し、以下、次のような逐次計算をおこなう。

(1) 今、荷重段階 ($j-1$) における諸量は確定したものとし、荷重増分をおこない、 j 段階に移行する。 $\sigma_{j-1} + \Delta \sigma_j$ の最大主応力が母体の引張限界を越えているかどうかを判定し、越えていない時は(2)の過程へ移り、越えている場合は、引張限界になるように、荷重および応力増分が調整され、ひびわれ発生による弾性マトリックスの変換をおこなう。

次に、各点の応力および変位に、このひびわれ発生による応力配分の影響が加算される。同時に、各選点において、新しいひびわれの発生、ならびにひびわれの回復、および、後に述べる塑性化の検討をおこない、新しいひびわれの発生に対しては上述の過程が繰り返される。ひびわれの回復がおこれば、その点の弾性マトリックスを元のマトリックスに変換し、次の計算に進む。塑性化については、(2)の操作をおこなう。

(2) (1) で計算された、各選点の応力 σ_j に対して、母体の降伏条件の判定が行なわれ、 $f \leq 0$ の場合は、次の荷重段階へと進み、(1)の過程へ移行する。 $f > 0$ の場合、塑性条件にしたがうように、各点の応力および変形にその影響が加算され、その点の応力が収束するまで、(2)の過程が繰返される。同時に(1)の後半で述べた、新しいひびわれの発生、ひびわれの回復、新しい点の塑性化を検討する。当然のことながら(1)、(2)の過程で、境界調整も同時におこなわれる。

4. 計算例：表面に荷重を受ける周面固定の厚い長方形スラブについて、前論文¹⁾の弾性計算をもとに配筋をおこない、計算をおこなった。結果については、目下、精度の面から検討中であり、講演時に説明する。