

表面せん断力を受ける厚板の応力と変形について

大阪市立大学 正員 倉田 宗章

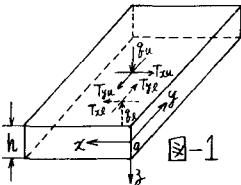
大阪市立大学 正員 堀川 都志雄

1. はしがき； 一般に構造物の外力は、面に垂直に作用する垂直力と、面に平行に作用する接線力との二つの要素に分解することが出来る。著者らは、昨年の全国大会において、垂直力が作用した場合について発表した¹⁾。一方、接線力が作用する場合の三次元弾性体の解は、i) Cerrutiの解²⁾ ii) 接線力がある半径円内において分布している場合の牟岐らの解³⁾があるが、それらは、いずれも半無限弾性体の表面に平行に水平力が作用しているものである。

本題は、周辺単純支持されている板が、部分水平接線力を受けた場合、従来の薄板理論、Reissner理論の限界を三次元弾性論に基づく厚板理論から、数値的に検討するものである。

2. 各理論式； 各理論式の誘導等については、紙面の都合上省略する。

A) Reissner理論および薄板理論



$$\Delta \Delta W = -q + \frac{k^2 \mu}{10} \Delta q + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial T_{xp}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yp}}{\partial y} \right) - \frac{k^2 \mu}{120} \Delta \left(\frac{\partial T_{xp}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yp}}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$H \Delta \phi = -t - \frac{\nu k^2}{12(1-\nu)} \Delta t - \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial T_{xm}}{\partial x} + \frac{\partial T_{ym}}{\partial y} \right) - \frac{\nu h}{2(1-\nu)} \Delta q' \quad (2)$$

$$\frac{h^2}{10} \Delta Q_x - Q_x = D \frac{\partial \Delta W}{\partial x} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{h}{2} T_{xp} + \frac{h^3}{120} \left\{ \mu \frac{\partial^2 T_{xp}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{xp}}{\partial y^2} + \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial^2 T_{yp}}{\partial x \partial y} \right\} \quad (3)$$

$$\frac{h^2}{10} \Delta Q_y - Q_y = D \frac{\partial \Delta W}{\partial y} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{h}{2} T_{yp} + \frac{h^3}{120} \left\{ \mu \frac{\partial^2 T_{yp}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_{yp}}{\partial x^2} + \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial^2 T_{xp}}{\partial x \partial y} \right\} \quad (4)$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \frac{k^2}{5} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\nu k^2}{10(1-\nu)} q - \frac{h^3}{120} \left\{ \mu \frac{\partial^2 T_{xp}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{xp}}{\partial y^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T_{yp}}{\partial x \partial y} \right\} \quad (5)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \frac{k^2}{5} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{\nu k^2}{10(1-\nu)} q - \frac{h^3}{120} \left\{ \mu \frac{\partial^2 T_{yp}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_{yp}}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T_{xp}}{\partial x \partial y} \right\} \quad (6)$$

$$M_{xy} = -(1-\nu) D \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{k^2}{10} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right) - \frac{h^3}{120} \left(\frac{\partial^2 T_{xp}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_{yp}}{\partial x^2} \right) \quad (7)$$

$$N_x = H \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \frac{k^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{\partial T_{xm}}{\partial x} + \nu \frac{\partial T_{ym}}{\partial y} \right) - \frac{\nu h}{2(1-\nu)} q + \frac{\nu k^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{\partial T_{xm}}{\partial x} + \frac{\partial T_{ym}}{\partial y} \right) \quad (8)$$

$$N_y = H \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \frac{k^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{\partial T_{ym}}{\partial y} + \nu \frac{\partial T_{xm}}{\partial x} \right) - \frac{\nu h}{2(1-\nu)} q + \frac{\nu k^2}{12(1-\nu)} \left(\frac{\partial T_{xm}}{\partial y} + \frac{\partial T_{ym}}{\partial x} \right) \quad (9)$$

$$N_{xy} = (1-\nu) H \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{k^2}{24} \left(\frac{\partial T_{xm}}{\partial y} + \frac{\partial T_{ym}}{\partial x} \right) \quad (10)$$

ここで、

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad H = \frac{E h}{1-\nu^2}, \quad q = q_x - q_y, \quad T_{xp} = T_{xe} + T_{xu}, \quad T_{xm} = T_{xe} - T_{xu}, \quad T_{yp} = T_{ye} + T_{yu}, \quad T_{ym} = T_{ye} - T_{yu},$$

$q' = q_x + q_y$, $t = \frac{\partial T_{xm}}{\partial x} + \frac{\partial T_{ym}}{\partial y}$, ν : ポアソン比, $\mu = \frac{2-\nu}{1-\nu}$, Δ : Laplace's operator, h : 板厚
なお、薄板理論については、 h^2, h^3 の項を無視すれば良い。

B) 厚板理論 ----- Galerkin-vector と Boussinesq の関数を用いる⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} 2GU &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad 2GV = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad 2GW = 2(1-\nu)\Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \\ \sigma_x &= (\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^2})\frac{\partial F}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = (\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial y^2})\frac{\partial F}{\partial y} - 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_z = 2(1-\nu)\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + (\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial y^2})\frac{\partial F}{\partial x} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + (\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2})\varphi, \quad \tau_{yz} = (1-\nu)\frac{\partial \Delta F}{\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \quad \tau_{xz} = (1-\nu)\frac{\partial \Delta F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\Delta \Delta F = 0, \quad \Delta \varphi = 0 \quad (12)$$

1) 倉田 堀川; “部分荷重を受ける厚板の応力と変形について”, 第28回年度学術講演会概要集, 昭和42年10月, P.306-307.

2) H.W. Westergaard, “Theory of elasticity and plasticity”.

3. 数値計算例;

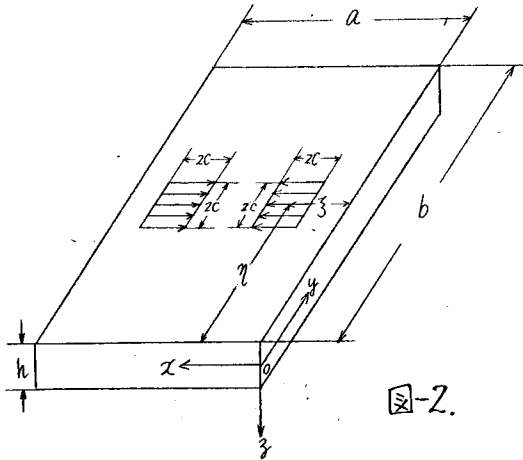


図-2.

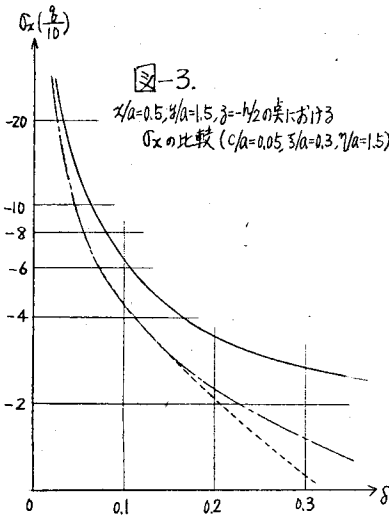


図-3.

$c/a=0.05, s/a=0.3, \eta/a=1.5, z/a=1.5$ の場合における σ_x の比較 ($c/a=0.05, s/a=0.3, \eta/a=1.5$)

4. 表面せん断力を受ける場合の薄板理論, および Reissner 理論の適性は、鉛直方向の力を受ける場合に比して、 $\delta (=h/a)$ の値は小さい時と判断できるであろう。また変形については、 $\delta < 0.15$ ぐらいであれば、Reissner 理論の妥当性があると思われる。他の载荷形式と本题に関する詳細は、当日発表する。

- 3). Maki, R; Progress in Solid Mechanics, vol.1. Chap. VIII. North-Holland, 1960
- 4). 宮本博, "三次元弾性論", 裳華房

図-2に示すような板が周辺単純支持されている場合を考
える。ここで

$$a=1.0, \nu=0.3, \delta=h/a, D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, b=3.0, \eta/a=1.5, s/a=0.3$$

実線; 厚板理論,

破線; Reissner 理論

一点鎖線; 薄板理論

図-4.

水平せん断力による変形図 ($c/a=0.05, s/a=0.3, \eta/a=1.5, z/a=1.5, \delta=0.3$)

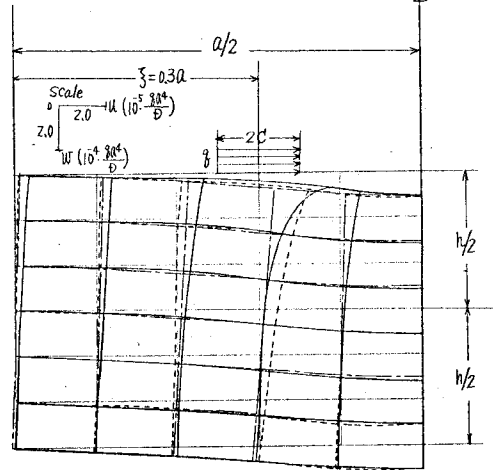


図-5.

水平せん断力による σ_{xy} の contour ($c/a=0.05, s/a=0.3, \eta/a=1.5, z/a=1.5, \delta=0.3$)

