

大阪市立大学 工学部 正員 倉田宗章
 " " " 〇園田恵一郎
 " 大学院 学生員 岸本修治

序 本研究においては、引張強度と圧縮強度が異なる弾塑性材料から成る平板の曲げモーメントとせん断力に関する降伏条件式を誘導し、それに基づいて、平板の極限強度問題に対する数値解法を提示した。

1. 曲げモーメントとせん断力に関する降伏条件式

引張強度と圧縮強度と異なる材料の降伏条件式として、Mises の式を変形した次式を用いる。

$\alpha k J_1 + J_2 = k^2$ ——— (1), こゝに J_1, J_2 は 1 次, 2 次の応力不変量, α, k は材料定数 ($\alpha = 0$ の場合は Mises の式に一致する)

板面に垂直な方向の応力 σ_z の影響を無視すれば、断面要素に対する式 (1) は、

$$F = \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + \sqrt{3} \alpha \sigma_0 (\sigma_x + \sigma_y) + 3 \tau^2 = \sigma_0^2 \quad (2)$$

ここに、 $\sigma_0 = \sqrt{3} k$, $\tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$, なお、一軸圧縮降伏応力に対する一軸引張降伏応力の比を δ とすれば、 $\alpha = (1 - \delta) \sqrt{1/3\delta}$ の関係がある。

(a) 静的許容応力場からのアプローチ (下界)

x, y 軸を主モーメント方向にとる。図. 1 に示すように一定応力場を考へる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_0^h \sigma_x dz = h \{ \eta \sigma_{x1} + (1 - \eta) \sigma_{x2} \} = 0 \\ N_y &= \int_0^h \sigma_y dz = h \{ \eta \sigma_{y1} + (1 - \eta) \sigma_{y2} \} = 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

(3) 式より、

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_0^h \sigma_x z dz = -\frac{h\eta}{2} \sigma_{x1} \\ M_y &= \int_0^h \sigma_y z dz = -\frac{h\eta}{2} \sigma_{y1} \\ Q &= \int_0^h \tau z dz = h \{ \eta \tau_{x1} + (1 - \eta) \tau_{x2} \} \end{aligned} \right\} (4)$$

(2) を上式に代入し、 $M_x/M_y = \lambda$ とおいて整理すれば、

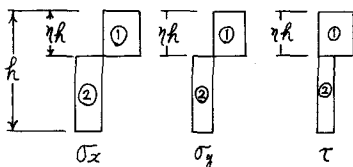


図. 1

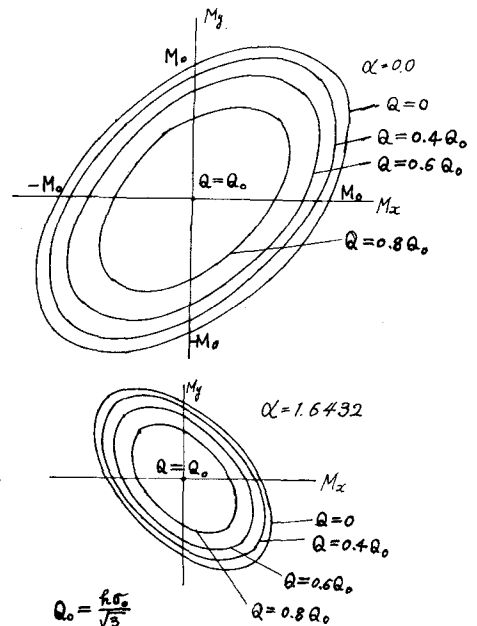


図. 2 降伏曲線 (下界)

$$\sqrt{3}hQ = \frac{\sqrt{\sigma_0^2 \eta^2 - 4(1-\lambda+\lambda^2)M_y^2 + 2\sqrt{3}\alpha\sigma_0\eta(1+\lambda)M_y}}{(1-\eta)M_y} + \frac{\sqrt{(1-\eta)^2\sigma_0^2 - 4(1-\lambda+\lambda^2)M_y^2 - 2\sqrt{3}\alpha\sigma_0(1+\lambda)}}{(1-\eta)M_y} \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = 0 \text{ より, } \eta = \frac{1}{2} - \sqrt{3}\alpha(1+\lambda)M_y \quad (6)$$

(6)を(5)に代入し, $\lambda M_y = M_x$ の関係を用いれば,

$$(1 + \frac{3}{4}\alpha^2)M_x^2 - (1 - \frac{3}{2}\alpha^2)M_xM_y + (1 + \frac{3}{4}\alpha^2)M_y^2 + \frac{3h^2}{16}Q^2 = M_0^2 \quad (7)$$

ここに, $M_0 = \sigma_0 h^2/4$, $\alpha = 0$, $\alpha = 1.6432$ に対する式(7)の曲線を図-2に示す。

なお, x, y 軸が主モーメントの方向と一致しない場合は,

$$(1 + \frac{3}{4}\alpha^2)M_x^2 - (1 - \frac{3}{2}\alpha^2)M_xM_y + (1 + \frac{3}{4}\alpha^2)M_y^2 + 3M_{xy}^2 + \frac{3h^2}{16}Q^2 = M_0^2 \quad (7)'$$

(b) 運動学的許容速度場からのアプローチ (上界)

x, y および z 方向の速度を u, v, w とし, 断面内の速度分布を中央面上の速度 u_0, v_0, w_0 と回転速度 θ_x, θ_y で表わせば,

$$w = w_0, \quad u = u_0 + \theta_x z, \quad v = v_0 + \theta_y z \quad (8)$$

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \quad \dot{\gamma}_x = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x},$$

$$\dot{\gamma}_y = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (9)$$

$$(9) \text{ より, } \dot{\epsilon}_x = \bar{\epsilon}_x + k_x z, \quad \dot{\epsilon}_y = \bar{\epsilon}_y + k_y z, \quad \dot{\gamma}_x = \bar{\gamma}_x, \quad \dot{\gamma}_y = \bar{\gamma}_y \quad (10)$$

$$\text{ここに, } \bar{\epsilon}_x = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \bar{\epsilon}_y = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_x = \frac{\partial \bar{\gamma}_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad k_y = \frac{\partial \bar{\gamma}_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$$

流れ法則より,

$$\dot{\epsilon}_x = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \epsilon_x} = d\lambda (2\sigma_x - \sigma_y + \sqrt{3}\alpha\sigma_0), \quad \dot{\epsilon}_y = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \epsilon_y} = d\lambda (2\sigma_y - \sigma_x + \sqrt{3}\alpha\sigma_0), \quad \dot{\gamma} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \tau} = 6d\lambda \tau, \quad \text{ここに, } d\lambda \text{ は塑性流れ係数, } \dot{\gamma}^2 = \dot{\gamma}_x^2 + \dot{\gamma}_y^2. \quad \eta = \bar{\epsilon}_x/k_x, \quad \xi = \bar{\epsilon}_y/k_y \text{ とし, } k_x/k_y = \mu, \quad \bar{\tau}/2k_y = \lambda \text{ とおけば, (2), (10) より,}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\sigma_0} &= \Phi(\mu) \frac{2\mu\eta + \xi + (2\mu+1)\tau}{\sqrt{\tau^2 + f(\xi, \eta)\tau + g(\xi, \eta, \lambda)}} - \sqrt{3}\alpha, \quad \frac{\sigma_y}{\sigma_0} = \Phi(\mu) \frac{2\xi + \mu\eta + \tau(2+\mu)}{\sqrt{\tau^2 + f(\xi, \eta)\tau + g(\xi, \eta, \lambda)}} - \sqrt{3}\alpha \\ \frac{\tau}{\sigma_0} &= \frac{\Phi(\mu)\bar{\tau}}{2} \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + f(\xi, \eta)\tau + g(\xi, \eta, \lambda)}}, \quad \Phi(\mu) = \frac{\sqrt{3(1+3\alpha^2)}}{3\sqrt{1+\mu+\mu^2}}, \quad f(\xi, \eta) = \frac{2\xi+2\tau\mu^2+(\xi+\eta)\mu}{1+\mu+\mu^2} \\ g(\xi, \eta, \lambda) &= \frac{\xi^2 + \eta^2\mu^2 + \eta\xi\mu + \lambda^2}{1+\mu+\mu^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz = 0, \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz = 0 \quad (12)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz, \quad Q = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau dz \quad (13)$$

降伏条件は, $M_x = M_y$, $M_x = -M_y$, $Q = 0$ 平面に関して対称であるから, $-1 \leq \mu \leq 1$, $0 \leq \lambda < \infty$ に対して (12) より, η , ξ の値を数値的に求め, (13) に代入すれば, 上界の降伏条件式が得られる。 $\alpha = 0$ に対する計算結果を図.3 に示す。

2. 円板の極限解析法

下界定理に基づく数値解法を考える。無次元化したモーメント, セン断力 $m = M/M_0$, $t = M_0/M_0$, $g = Q/Q_0$ を導入すれば, 極限荷重 P の決定問題は,

$$\left. \begin{aligned} &\text{Maximize } P \\ &F(m_i, t_i, g_i) \leq 1, \quad i=1, 2, 3, \dots, n \\ &m_i = m_{0i}P + m'_i, \quad t_i = t_{0i}P + t'_i, \quad g_i = g_{0i} \end{aligned} \right\} (14)$$

ここに, m_{0i} , t_{0i} , g_{0i} は単位荷重 ($P=1$) に対する弾性モーメント, セン断力であり, m'_i , t'_i は零荷重と釣合うモーメントであり, i は平板の半径方向に等間隔で分割した時の細目点を表わす。降伏関数 F は非線型であるので, (14) の問題は非線型計画法の問題となる。

Dantzig-Wolfe の Decomposition Method により, 降伏曲線 $F(m_i, t_i, g_i) = 1$ 上の代表点, $\bar{m}_k, \bar{t}_k, \bar{g}_k$, $k=1, 2, \dots, r$ を選べば, (14) の問題は,

$$\left. \begin{aligned} &\text{Maximize } P \\ &\sum_{k=1}^r \alpha_i^k = 1, \quad \sum_{k=1}^r \alpha_i^k \bar{g}_k - P g_{0i} = 0 \\ &\sum_{k=1}^r \alpha_i^k (\bar{m}_k - \bar{t}_k) + \frac{P}{2a} \left(\sum_{k=1}^r \alpha_i^k \bar{m}_k - \sum_{k=1}^r \alpha_i^k \bar{m}_k \right) \\ &- P(m_{0i} - t_{0i}) - P \rho_i \left(\frac{dm_0}{dr} \right)_i = 0 \\ &\alpha_i^k \geq 0 \quad \Delta = a/n-1, \quad \rho_i = r_i/a \end{aligned} \right\} (15)$$

(15) は線型計画の問題であるので, シンプレックス法にて解くことができる。

$(\bar{m}_k, \bar{t}_k, \bar{g}_k)_{k=1, 2, \dots, r}$ を $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(-1, -1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$ に選び, 降伏条件式 (2) における α を零とした場合の数値計算結果を図.4, 表.1 に示す。

なお, これらの図および表中のセン断力を考慮しない場合の値は, Tresca の降伏条件を用いた曲げ理論に基づく解析値と一致する。

表 1 Limit Load ($P a^2/M_0$)

β	Number of Mesh (n)						セン断力を無視した時
	5	6	7	8	9	10	
1.0	5.32	5.37	5.40	5.42	5.43	5.44	6.0 *
0.3	24.5	24.8	24.4	24.2	24.5	24.5	27.8 *

* Hopkins, Prager による値

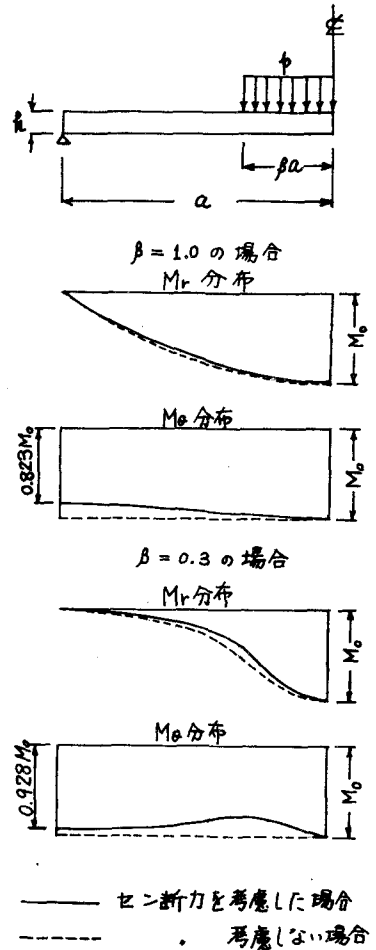


図.4