面内力を受ける変厚四辺形板の数値解析

大阪市立大学工学部　正員　倉田宗章
近畿大学 理工学部　正員　○谷平勉

§1．まえがき． 変断面板の平面応力問題は、変断面板の曲げ問題と同じように、重調和方程式のみでは表現できず、一般的な4階の偏微分方程式となる．それ故これらの問題の厳密解は得られていず、何れかの近似解法によらなければならない訳であるが、平面応力問題の場合と曲げ問題の場合とでは境界処理の点で近似解法の選択の際の観点が異ってくるようで、著者らが以前任意四辺形平板の曲げ問題を差分法で解いた*が、その方法を用いて今回は変断面板の平面応力問題に拡張したものである。変厚 Sheibe を解いた例としては正方形板で一方向にのみ断面が直線変化する場合の計算例を、A. Habel**が与えている。本文では、任意の四辺形状の平板に任意の面内力が作用する場合で、変断面の形は、x, y 方向にそれぞれ2回まで微分可能な任意関数形で与えられるものについて、差分法による解法を示し、2, 3の数値例を掲げる

§2．変厚平面応力問題の一般式．

板厚を $h\,(=h(x,y))$ とし、$S_x=h\sigma_x$，$S_y=h\sigma_y$，$t_{xy}=h\tau_{xy}$，$\bar{X}=hX$，$\bar{Y}=hY$ とおくと等厚板の場合と同様のつり合式ができ，応力関数およびポテンシャルとして，$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=S_y-\bar{V}$，$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=S_x-\bar{V}$，$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=-t_{xy}$，$\frac{\partial\bar{V}}{\partial y}=-\bar{Y}$，$\frac{\partial\bar{V}}{\partial x}=-\bar{X}$ を満す ϕ, $\bar{V}$ を導入すると最終的に次のような、直交座標系における変厚平面応力問題の一般式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\Delta\Delta\phi-\frac{2}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\Delta\phi-\frac{2}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\Delta\phi-\frac{1}{h^2}\left[h\Delta h-2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2-2\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]\Delta\phi\\
&\quad+(1+\nu)\frac{1}{h^2}\left\{\left[h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\left[h\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+2\left[h\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}-2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right\}\\
&=-(1-\nu)\left\{\Delta\bar{V}-\frac{2}{h}\left[\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\bar{V}}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\bar{V}}{\partial y}\right]+\frac{1}{h^2}\left[h\Delta h-2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2-2\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]\bar{V}\right\}
\end{aligned}$$

§3．四辺形板における差分式．

四辺形板の差分 net を図1のように作ると、任意点0における $\Delta\phi$, $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$ 等の差分表示は図2のような近傍の計9点で表現することができる。例えば、$\Delta\phi$ の差分表示は、u 軸を基準に考えれば、1, 0, 3, 4′, 2′ 点で表わすことができる。

$$[\Delta\phi]_0=\frac{1}{r_0^2}(\phi_1-2\phi_0+\phi_3)+\frac{2\phi_{2'}}{t_2(t_2+t_4)}-\frac{2\phi_0}{t_2t_4}+\frac{2\phi_{4'}}{t_4(t_2+t_4)}$$

$$\phi_{2'}=\frac{1}{2}g_2(g_2-1)\phi_7+(1-g_2)(1+g_2)\phi_2+\frac{1}{2}g_2(g_2+1)\phi_6$$

$$\phi_{4'}=\frac{1}{2}g_4(g_4-1)\phi_5+(1-g_4)(1+g_4)\phi_4+\frac{1}{2}g_4(g_4+1)\phi_8$$

$$g_2=\frac{\cos\theta_0}{\cos(\theta_0-\theta_2)}\frac{t_0}{r_2},\quad t_2=\frac{t_0\sin\theta_0}{\cos(\theta_0-\theta_2)}$$

$$g_4=\frac{\cos\theta_0}{\cos(\theta_0-\theta_4)}\frac{t_0}{r_4},\quad t_4=\frac{t_0\sin\theta_0}{\cos(\theta_0-\theta_4)}$$

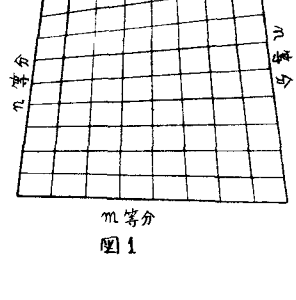


図1

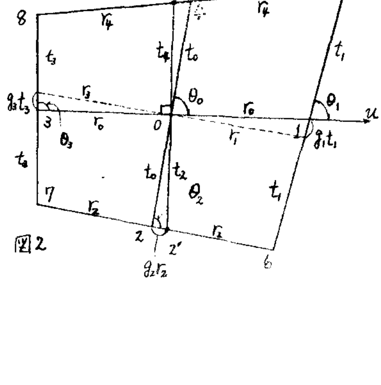


図2

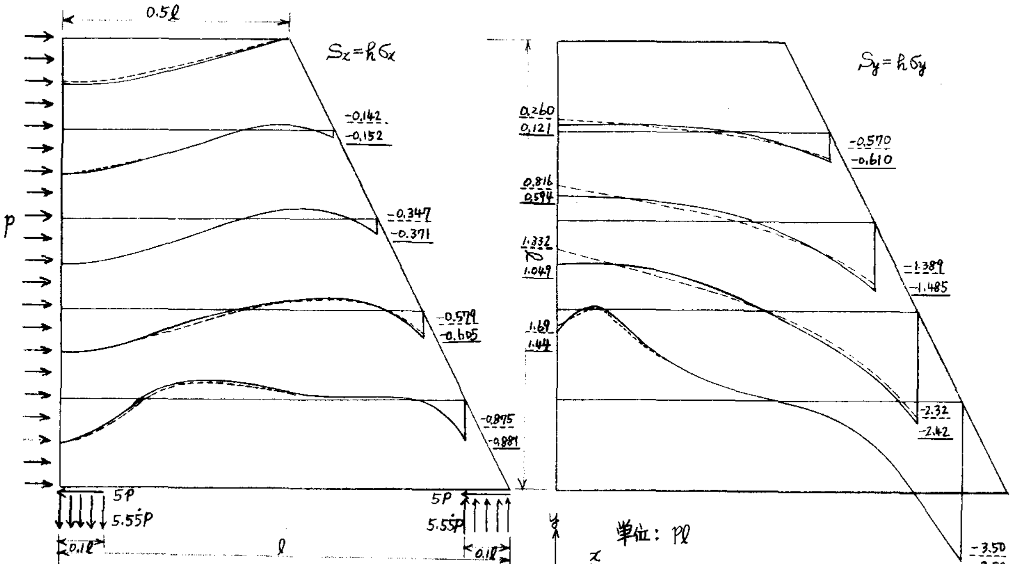
υ軸を基準に考えても同様の式が得られるのでこれらを平均したものを用いると誤差が平均化されると考えられる。結果だけ示すと、

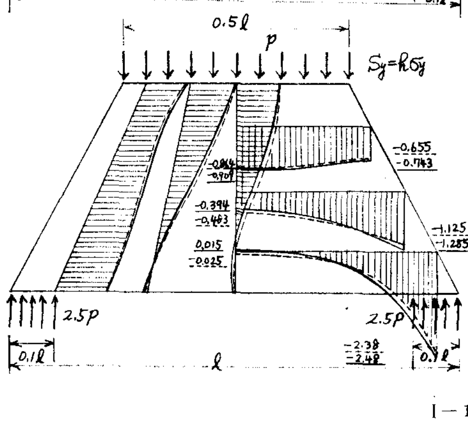
$$
\begin{aligned}
[\Delta\phi]_0 = &-\left(\frac{1}{r_0^2}+\frac{1}{t_0^2}+\frac{1}{r_1 r_3}+\frac{1}{t_2 t_4}\right)\phi_0 + \left[\frac{(1-g_1)(1+g_1)}{r_1(r_1+r_3)}+\frac{1}{2r_0^2}\right]\phi_1 + \left[\frac{g_1(g_1-1)}{2r_1(r_1+r_3)}+\frac{g_4(g_4-1)}{2t_4(t_2+t_4)}\right]\phi_5 \\
&+\left[\frac{(1-g_2)(1+g_2)}{t_2(t_2+t_4)}+\frac{1}{2t_0^2}\right]\phi_2 + \left[\frac{g_1(g_1+1)}{2r_1(r_1+r_3)}+\frac{g_2(g_2+1)}{2t_2(t_2+t_4)}\right]\phi_6 \\
&+\left[\frac{(1-g_3)(1+g_3)}{r_3(r_1+r_3)}+\frac{1}{2r_0^2}\right]\phi_3 + \left[\frac{g_3(g_3-1)}{2r_3(r_1+r_3)}+\frac{g_2(g_2-1)}{2t_2(t_2+t_4)}\right]\phi_7 \\
&+\left[\frac{(1-g_4)(1+g_4)}{t_4(t_2+t_4)}+\frac{1}{2t_0^2}\right]\phi_4 + \left[\frac{g_3(g_3+1)}{2r_3(r_1+r_3)}+\frac{g_4(g_4+1)}{2t_4(t_2+t_4)}\right]\phi_8
\end{aligned}
$$

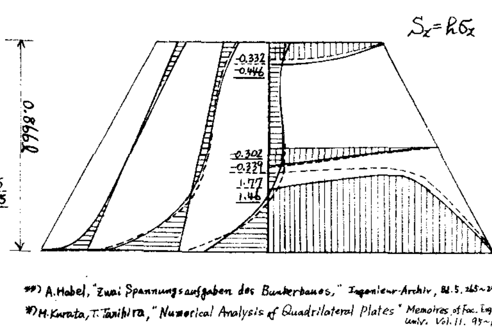
各点での $\Delta\phi$ の差分式の係数の集合として出来る行列を2乗すれば、$\Delta\Delta\phi$ の係数行列ができ上る。$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2},\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$ については、まず u,υ 座標系に変換してから差分式にするが詳細は省く。

§4. 数値計算例

下図のような2ケースについて、・等厚の場合(実線) ・変厚の場合(点線)[頂部の板厚が底部の1/4に直線状に y 方向のみに変化する場合](ポアソン比=0.167)の応力分布を示す。







**) A. Hobel, "Zwei Spannungsaufgaben des Bunkerbaues," Ingenieur-Archiv, Bd. 5, 265~274, 1934

*) M. Kurata, T. Tanihira, "Numerical Analysis of Quadrilateral Plates" Memoires of Fac. Eng. Osaka City Univ. Vol. 11, 93~104, 1969