

京都大学工学部 正員 母羽美次

京都大学工学部 正員 小林昭一

株式会社 銭高組 正員 青柳計太郎

1. はじめに

有限要素法 (F.E.M.) の構造力学以外への適用は、浸透問題・圧密問題・熱伝導問題等多方面にわたるが、最近、重みつき残差法 (W.R.M.) により、エネルギー原理の存在するものに限定することなく、F.E.M. の公式化が簡単になされ、注目されている。本研究は、この W.R.M. を地下空洞周辺の拡散問題に適用し数値解析を試みたものである。

2. 解析法 以下簡単に W.R.M. による公式化の概要を述べる。

いま境界 S で囲まれた領域 V で、微分方程式および境界条件が次のように与えられているものとする。

$$V \text{ で } L(\{\phi\}) = h \quad S \text{ で } G(\{\phi\}) = 0$$

ここに L, G は微分演算子である。ここで境界条件を満足する関数、すなわち試験関数として $\{\phi\}_t = [N]\{\phi\}$ を選ぶと一般に微分方程式は満足されないが

$$L(\{\phi\}_t) - h = R \neq 0$$

残余 R が残る。この残余 R を小さくする方法として、重み関数 W_i を適当に選ぶ

$$\iint_V W_i R dV = \iint_V W_i [L(\{\phi\}_t) - h] dV = 0$$

とする方法が考えられる。これが W.R.M. である。この W_i の選ぶ方にはいろいろ考えられるが、本研究では、 $W_i = N_i$ と選ぶ方法、すなわち Galerkin 法を適用して解析した。

3. W.R.M. による拡散方程式の数値解析

地中での拡散方程式は次のように与えられている。

$$(D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}) - (v_x \frac{\partial C}{\partial x} + v_y \frac{\partial C}{\partial y}) - (\frac{P}{e} K_{ab} + \lambda) C - (1 + \frac{P}{e} K_{ad}) \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

ここに C : 気相中のイオン濃度 (g/cm^3) D_x, D_y : 拡散係数 (cm^2/sec) v_x, v_y : 流速 (cm/sec) P : 土砂粒の真密度 (g/cm^3) e : 間げき比 K_{ab} : イオンの吸着係数 ($cm^3/g \cdot sec$) K_{ad} : イオンの付着係数 (cm^3/g) λ : 減衰係数 (sec^{-1})。1) 式を解くためには、まず v_x, v_y を決定しなければならない。気体の流速が圧力変化のみによつて生じるとすれば、その関係は次のように与えられる。

$$v_x = -\frac{K_x}{\gamma_w} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{K_y}{\gamma_w} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2), (3)$$

ここに K_x, K_y : 気体の透気係数 (cm^2/sec) P : 気体の圧力 (kg/cm^2) γ_w : 単位体積水の重量 (g/cm^3) である。次に、気体の連続の方程式を圧力の項で表わすと

$$K_x \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \alpha \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4)$$

$$\alpha = \beta \frac{e}{1+e} \quad \beta: \text{空気の圧縮率} \quad e: \text{間げき比}$$

したがって (2), (3), (4) から v_x, v_y を用いて、(1) に対して W.R.M. を適用すると次のようになる。

$$\iint [N_i [(D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}) + (v_x \frac{\partial C}{\partial x} + v_y \frac{\partial C}{\partial y}) + (\frac{P}{e} K_{ab} + \lambda) C + (1 + \frac{P}{e} K_{ad}) \frac{\partial C}{\partial t}] dx dy = 0 \quad (5)$$

これを Matrix の形で表示すれば

$$([R_1] + [R_2] + [R_3] + [R_4])\{G\} = [R_4]\{C\}_{t-\Delta t} + \{F\}$$

$$[R_1] = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} D_x b_i b_i + D_y c_i c_i & D_x b_i b_j + D_y c_i c_j & D_x b_i b_m + D_y c_i c_m \\ \text{Sym.} & D_x b_j b_j + D_y c_j c_j & D_x b_j b_m + D_y c_j c_m \\ & & D_x b_m b_m + D_y c_m c_m \end{bmatrix}$$

$$[R_2] = \frac{\Delta}{6} \begin{bmatrix} v_x b_i + v_y c_i & v_x b_j + v_y c_j & v_x b_m + v_y c_m \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

$$[R_3] = \frac{\Delta}{12} \left(\frac{p}{e} K_{ab} + \lambda \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[R_4] = \frac{\Delta}{12} \cdot \frac{1 + \frac{p}{e} K_{ad}}{\Delta t} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\iint N_i N_j dx dy = \frac{\Delta}{12} (i=j)$$

$$[F] = \int_a N_i \frac{\partial c}{\partial n} ds = -\frac{\Delta}{6} (i=j)$$

となる。Δtに同じ逐次計算していけば任意時刻の解求められる。

4. 計算例

図-1のような地下に開削された空洞を想定し、地中岩盤の空隙比 $e=0.5$ 透気係数 $k_x=k_y=10^{-3}$ とした時の空洞の内在変化を図-2に示す。図-3には空洞周辺の圧力分布の一例と、図4、図-5には流速分布の一例を示す。 $K_{ab}=0.02$ $D_x=D_y=0.02$ $K_{ad}=0.02$ $\lambda=0.093 \times 10^{-7}$ とした時のイオン濃度分布の例等については当日詳細を発表する。

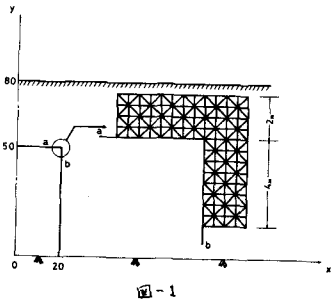


図-1

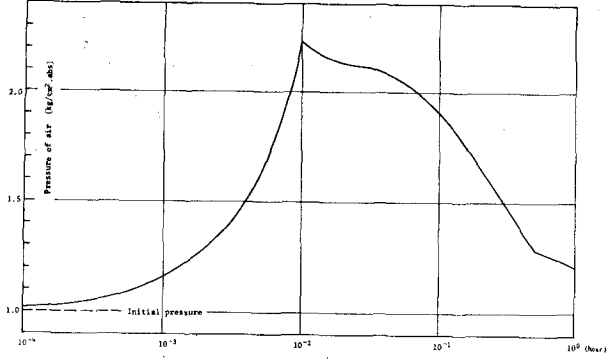


図-2

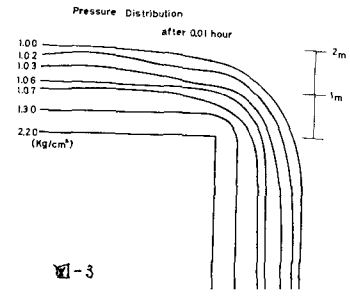


図-3

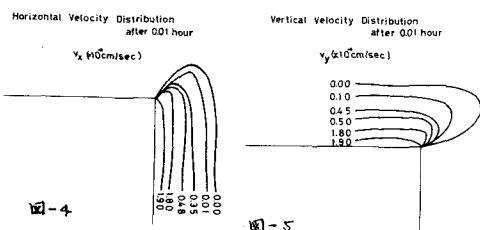


図-4

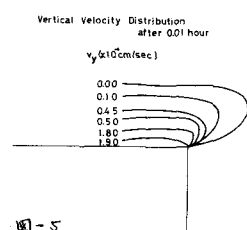


図-5

参考文献

- (1) 小林昭一, 有限要素法の考え方, 弾塑性解析のための有限要素法の基礎と応用. pp45-65 (1973)