

大阪工業大学

正員 岡村宏一

東洋技研コンサルタント

正員 島田 功

東洋技研コンサルタント

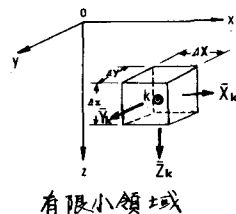
正員 森 茂義

1. まえがき： 3次元弾性問題について、等方弾性体の場合には、基本的な解 (Kelvin 解, Boussinesq, Cerruti の解, Mindlin オイ, オ2問題の解) が見出されていゝが、異方性体に対しては、半無限弾性体の表面に、鉛直力を受ける軸対称問題の解、以外は筆者の知る限りでは見当らないようである。ところで、筆者は、すでに部分的に剛性の異なる3次元体の1つの数值解法¹⁾を提案してきた。標記の問題も、等方弾性体からの剛性の偏倚として、同様に扱ふことが出来、この解法は、直交異方性の問題に限らず、任意の異方性の問題、あるいは境界値問題にも適用できる。

さて、3次元体に作用する力の影響は、離れた箇所では、しばしば急激な減少を示し、異方性の影響も離れた所では、あらわれなくなるであろう。したがって、問題によっては、異方性の条件を、ある有限領域に制限しても、実用上、十分な精度で解析でき、この問題も部分的に剛性の異なる問題として扱ふことができる。また、このような扱いは、3次元問題がしばしば局所的な事象について論じられる事実を考慮すれば、解析の目的によっては、実用上、有利な面を持つものといえよう。さらに、本解法は、弾性問題の厳密解である、Mindlin 解の線形化した重ね合せてあり、連続解を基底においてあり、高精度の解が期待でき、さらに分布荷重に対する解析も、特解として、Boussinesq, Cerruti, Mindlin らの解を積分したもので与えられることにより、容易にできる。本文は、このような見地に立って、異方性体の解析への本解法の妥当性、ならびに異方性による応力分布の変化などについて述べるものである。

2. 解法： 一般的な直交異方性の弾性マトリックスを $[D]$ とすると、

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ \text{対 称} & & & 1/G_{zy} & 0 & 0 \\ & & & & 1/G_{yz} & 0 \\ & & & & & 1/G_{zx} \end{bmatrix}$$



$[D_0]$ を基本とする等方弾性体の弾性マトリックスとし、 $[D] = [D_0] + [\Delta D]$ のように分離すると、応力-ひずみ関係は

$$\{\sigma\} = [D_0] \cdot \{\epsilon\} + [\Delta D] \cdot \{\epsilon\} \quad \text{----- (1)}$$

1) 岡村, 島田: "弾塑性, もしくは不均質弾性を有する3次元体の1数值解法"

土木学会論文報告集 No.212, 1973, 4, PP.11~24

したがって、釣合条件式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial z \partial x} \right) + G_0 \nabla^2 u &= - \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z} \right) = - \bar{X} \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 v &= - \left(\frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z} \right) = - \bar{Y} \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial w}{\partial z^2} \right) + G_0 \nabla^2 w &= - \left(\frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} \right) = - \bar{Z} \end{aligned} \right\} \text{----- (2)}$$

ただし、 $\{\sigma^*\} = [AD] \cdot \{\epsilon\}$ 、 G_0 、 E_0 、 λ_0 は基本となる等方弾性体の弾性定数である。

さて、式(2)の右辺の項 $\bar{X}$ 、 $\bar{Y}$ 、 $\bar{Z}$ は弾性マトリックスの偏倚量 $[AD]$ に従属する関数であり、釣合条件式の性格から、Body Forceと同様の意味をもつ物理量である。ところで前論文にも示したように、異方性体内に設けた選点を包む有限小領域では、これらの物理量は均一な分布を持つものとみなす。

しかも、これらの $\bar{X}_k$ 、 $\bar{Y}_k$ 、 $\bar{Z}_k$ は $\{\epsilon\}$ を含んだ $\{\sigma^*\}$ を1次微分したもので、部分的差分法により線形化され、 $\{\epsilon\}$ に関する1次式として、 $\bar{X}_k$ 、 $\bar{Y}_k$ 、 $\bar{Z}_k$ が与えられる。この場合未知量となる $\{\epsilon\}$ は、各選点におけるいずれの条件により形成される連立方程式の解として定まり、各領域で評価されねばならない $\bar{X}_k$ 、 $\bar{Y}_k$ 、 $\bar{Z}_k$ が求まる。さらに、これらのBody Forceを作用させることにより、

任意点のいずれ、ならびに、応力が求まる。

3. 計算例：半無限体の表面より $5a$ の位置に鉛直力(作用領域 $a \times a \times a$)が作用する場合の解析を行った。なお

本例題における異方性体として、 z 軸に直角なすべての方向のヤング率を E_H 、 z 軸方向のヤング率を E_V 、ポアソン比 0.2 のものを扱い、 $n = E_H/E_V$ を種々に変化させた結果を示す。図-3、4は

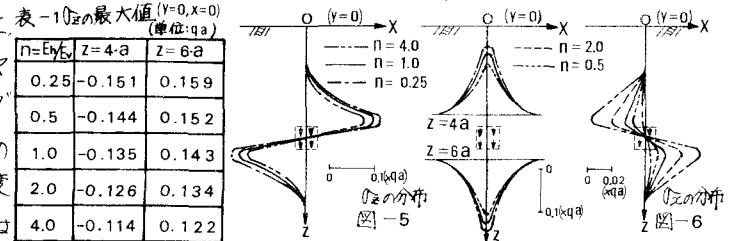
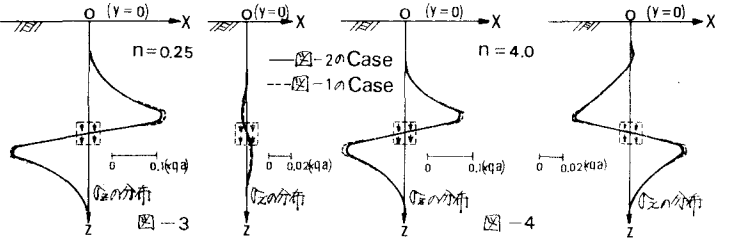


表-1 σ_z の最大値 ($Y=0, X=0$) (単位: qa)

$n = E_H/E_V$	$z = 4a$	$z = 6a$
0.25	-0.151	0.159
0.5	-0.144	0.152
1.0	-0.135	0.143
2.0	-0.126	0.134
4.0	-0.114	0.122

$n=0.25, 4.0$ の場合について、異方性の領域を図-1、2 のように制限した場合の差異を調べたものであり、両者は、よく一致しており図-2に示す範囲で、実用上、十分な解が得られるようである。せん断応力についても同様によく一致しており、データを省略した。図-5、6は n を変化させた時の応力分布を示したもので、 σ_z は n の変化によって大きく変化し、 n の増大と共に値は大きくなる。一方、 σ_x は n の増大と共に応力の分散がよくなる。表-1は、 $z=4a, 6a$ における $\sigma_z|_{max}$ を各 n について示したものである。

4. むすび：前節に示したデータに関する限りでは、本解法は異方性体の3次元弾性問題の解析において異方性の範囲を制約するという利点と相まって、有用であるといえる。目下境界調整を含む種々の問題についての解析を続行中であり機会があれば発表したい。