I−10

積分方程式による連続体の有限要素構成

京都大学工学部　正員　丹羽義次
〃　〃　正員　小林昭一
〃　〃　正員○福井卓雄

本報文は，連続体の有限要素解析過程において super-element とも呼べる特殊な要素を積分方程式法を用いて導入することにより，有限要素法の改良を試みるものである。

いま，簡単のために図1のような領域に何らかの外力が作用している物体の弾塑性解析をすることを考える。これを通常の有限要素法で解析する場合は全領域を要素に分割する必要があるが，このような問題では，材料そのものを非均質と考え，そのシミュレーションを行なわない限り，材料特性が変化するのは塑性化した一部分の領域だけであり，大部分は均質な材料特性を保持したままである。ここで有限要素法の定義について振り返ってみると，有限要素法とは，構造物とか連続体を有限個の要素に分割し，それぞれの要素の特性を求め，その特性を有する要素の集合体として構成される構造物ないし連続体の近似モデルの挙動を解析する手法であると言える。これより，有限要素法の広範な適用性，例えば非均質な領域の取り扱いとか，非線形問題への適用性は，有限個の要素の集合体という特性に依存していることが理解される。即ち，物体の幾何学的な複雑さおよび材料特性の複雑さを単純な特性を持つ要素の集合体としてとらえなおすことにより実際の解析を可能にしている。従って，必要な部分ではできるだけ分割を細かくし集合体としての特性を活用すべきであるし，逆に材料性質の変らない均質な部分では，できるだけ大まかな分割で済ませた方が効率が良いことは自明である。一方，積分方程式法は線形境界値問題に対して一般的な方法であり，特に均一の領域に対しては精度，計算時間などの点ですぐれている。そこで，図1のような問題においては，均質な材料特性を保持する部分をひとまとめにした super element を導入し，その要素特性を積分方程式法を用いて求めることを考える。

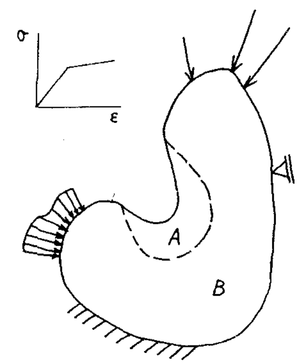

図1

本法のように，分かっている解をいくつか組み合わせて，より複雑な問題を解く方法は古くから行なわれているが，最近になってクラックとか応力集中問題を扱うために級数解と選点法を用いて構成した要素を導入することがなされている。(1, 2) 積分方程式法を用いたとき，このような応力特異点，応力集中を含む問題に対しても容易に適用されることが期待される。

積分方程式法によって要素の特性を求める方法を説明するために，例として二次元等方弾性体の静的境界値問題について考える。領域Dおよびその境界∂Dにおいて

次のように境界値問題が与えられているとする。

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
&\mathbb{L}_{ij}u_j \equiv G\left[u_{i,jj}+\frac{2}{\kappa-1}\,u_{j,ji}\right] = -F_i && \text{in } D\\
&T_i = \mathbb{T}^n_{ij}u_j \equiv G\left[\frac{\partial u_i}{\partial n}+n_j u_{j,i}-\frac{\kappa-3}{\kappa-1}\,n_i u_{j,j}\right] = f_i && \text{on } \partial D_1 \subset \partial D\\
&u_i = g_i && \text{on } \partial D_2 = \partial D - \partial D_1
\end{aligned}
$$

ここに，u_i, F_i, T_i は変位，物体力，境界応力，$\mathbb{L}_{ij}$, $\mathbb{T}^n_{ij}$ は偏微分作用素，n_i は境界上の単位法線ベクトル，G はせん断弾性係数，κ は ポアソン比を ν とすれば，平面応力状態のとき $\kappa=\frac{3-\nu}{1+\nu}$，平面ひずみ状態で $\kappa=3-4\nu$．f_i, g_i は与えられたベクトル関数．添字については総和規約を適用する。

このとき，問題は境界上の未知変位および未知応力に関する次の積分方程式に帰着することができる。(3)

$$
(2)\quad \frac{1}{2}u_i(x_0) = -\int_D \Gamma_i^{(k)}(x_0;\xi)F_k(\xi)\,da_\xi + \int_{\partial D}\left[\Gamma_i^{(k)}(x_0;y)\mathbb{T}^y_{kj}u_j(y) - \Gamma_{Ii}^{(k)}(x_0;y)u_k(y)\right]ds_y \qquad x_0\in\partial D.
$$

ここに，$\Gamma_i^{(k)}(x;y)$, $\Gamma_{Ii}^{(k)}(x;y)$ は基本特異解である。　$r^2=(x_i-y_i)(x_i-y_i)$．

$$
(3)\quad \Gamma_i^{(k)}(x;y) = \frac{1}{2\pi(\kappa+1)G}\left(\kappa\delta_{ik}\log r - r_{,i}r_{,j}\right),\quad \Gamma_{Ii}^{(k)}(x;y) = \mathbb{T}^y_{kj}\Gamma_i^{(j)}(x;y)
$$

図2のような super element を考える。簡単のために要素内には物体力はなく，式(2)の右辺第一項の境界応力は節点上の集中力で代表して表わすとする。境界上の変位を，適当な変位関数を仮定して　$u_i(y)=\sum_{K=1}^{N}N^K(y)\Phi_i^K$　であらわせば，式(2)は．

$$
(4)\quad \sum_{L=1}^{N}\Gamma_i^{(k)}(x_K;x_L)F_k(x_L) = \sum_{M=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\delta_{ik}N^M(x_K) + \int_{\partial D}\Gamma_{Ii}^{(k)}(x_K;y)N^M(y)\,ds_y\right]\Phi_k^M
$$

上式を $2N$ 個の独立な基底 Φ_1^i, Φ_2^i, … について解けば要素の剛性が得られる。

$$
(5)\quad F_k(x_K) = \sum_{L=1}^{N}K_{k\ell}^{L}(x_K)\,\Phi_\ell^L
$$

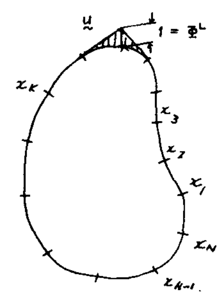

図 2

このときの要素内の変位は次のように与えられる。

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
u_i(x) &= \sum_{L=1}^{N}\Gamma_i^{(k)}(x;x_L)F_k(x_L) - \sum_{K=1}^{N}\left[\int_{\partial D}\Gamma_{Ii}^{(k)}(x;y)N^K(y)\,ds_y\right]\Phi_k^K\\
&= \sum_{K=1}^{N}\left\{\sum_{L=1}^{N}\Gamma_i^{(\ell)}(x;x_L)K_{\ell k}^{K}(x_L) - \int_{\partial D}\Gamma_{Ii}^{(k)}(x;y)N^K(y)\,ds_y\right\}\Phi_k^K
\end{aligned}
$$

この要素を用いた計算結果の詳細，従来の有限要素法との比較などについては当日スライドで説明する。

参考文献

(1) Tong, P., T.H.H. Pian and S.J. Lasry, A Hybrid-element Approach to Crack Problems in Plane Elasticity, Int. J. num. Meth. Engng, 7, 297-308 (1973)
(2) Rao, A.K., I.S. Raju and A.V. Krishna Murty, A Powerful Hybrid Method in Finite Element Analysis, Int. J. num. Meth. Engng, 3, 389-403 (1971)
(3) 丹羽義次，小林昭一，福田和男，積分方程式による任意形状，多数空洞周辺の応力解析，土木学会論文報告集，195，pp27-35 (1971)