I－7　　積分方程式による境界値問題の解法

京都大学工学部　正員　小林昭一

1. はじめに

物理数学に於ける境界値問題を積分方程式を用いて公式化する方法は，今世紀の初頭，主としてイタリヤの応用数学者，弾性学者によって試みられた。しかし，一般には，積分方程式の解析解を求めることが困難であるため，その後この方面の研究は長い間放置されたままであった。最近になって，大型計算機の発達に伴って，積分方程式を代数方程式に近似して解く方法が普及するに及んで，再びこの解法が見直されるようになってきた。

本報では，まず，物理数学に最も普遍に現われる2階の線形連立偏微分方程式の初期-境界値問題を積分方程式に帰着させる一般的な方法について述べ，ついで具体的な問題に適用した例を示す。

2. 初期-境界値問題の積分方程式による表現

今，領域 $V+\partial V$ でベクトル $\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x},t)$ （$\underset{\sim}{x}$；座標(x^1,x^2,x^3)，t；時間）に関する2階の線形偏微分方程式が次のように与えられているものとする。

$$(C^{kl}_{ij}u^{i|j})|_k + D\delta^l_i u^i + f^l = a\ddot{u}^l + b\dot{u}^l \ , \quad i,j,k,l=1,2,3 \tag{1}$$

ここに，C^{kl}_{ij} は4階のテンソル，f^lはベクトル，D，a，b はスカラー定数，δ^l_i は Kronecker の delta を表わし，$u^i|_k$ などはベクトル u^i の x^k による共変微分を，また，$\dot{u}^i$ などは時間による微分 $\partial u^i/\partial t$ を意味するものとする。

初期条件としては，$t=0$ で，$\dot{u}^i=\dot{u}^i_0$，$u^i=u^i_0$ と与えられたものとする。

ここで，Laplace 変換

$$\bar{\underset{\sim}{u}}(\underset{\sim}{x};s)=\int_0^\infty e^{-st}\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x},t)\,dt \tag{2}$$

を導入し，式(1)の Laplace 変換を取ると次式を得る。

$$L\,\bar{\underset{\sim}{u}}(\underset{\sim}{x},s)+\bar{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x},s)=0 \ ; \quad L\,\Box \equiv L^l_i\Box^i=(C^{kl}_{ij}\Box^{i|j})|_k+\{D-(as^2+bs)\}\delta^l_i\Box^i \tag{3),(4}$$

$$\bar{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x},s)=\bar{\underset{\sim}{f}}+a\dot{\underset{\sim}{u}}_0+(as+b)\underset{\sim}{u}_0 \tag{5}$$

さて，ここで2つの異なった系（上添字(1)，(2)を用いて区別する）を考えると，一般的な式として次式を得る。

$$\int_V \bar{u}^{(2)}_l\left[(C^{kl}_{ij}\bar{u}^{(1)i|j})|_k+\{D-(as^2+bs)\}\delta^l_i\bar{u}^{(1)i}\right]dV-\int_V \bar{u}^{(1)}_l\left[(C^{kl}_{ij}\bar{u}^{(2)i}|_j)|_k+\{D-(as^2+bs)\}\delta^l_i\bar{u}^{(2)i}\right]dV$$
$$=\int_{\partial V}\{\bar{u}^{(2)}_l C^{kl}_{ij}\bar{u}^{(1)i|j}-\bar{u}^{(1)}_l C^{kl}_{ij}\bar{u}^{(2)i|j}\}n_k\,dS-\int_V C^{kl}_{ij}\{\bar{u}^{(2)}_l|_k\,\bar{u}^{(1)i|j}-\bar{u}^{(1)}_l|_k\,\bar{u}^{(2)i|j}\}\,dV \tag{6}$$

ここに，n_k は，∂V の外向き単位法線ベクトルである。

特に, $C_{ij}^{kl}=C_{lk}^{ji}$ ----(7) であれば, $N\bigcirc \equiv N_i^l\bigcirc^i = C_{ij}^{kl}\bigcirc^{i|j}n_k$ で定義される演算子を用いることにより, 式(6)は次のように簡単になる。

$$\int_V(\bar{u}^{(2)}L\bar{u}^{(1)}-\bar{u}^{(1)}L\bar{u}^{(2)})dV=\int_{\partial V}(\bar{u}^{(2)}N\bar{u}^{(1)}-\bar{u}^{(1)}N\bar{u}^{(2)})dS \tag{8}$$

この式は, Greenの公式を一般化したものである。式(8)と式(3)より, 一般的な相反作用の定理が次のように求められる。この式は, 式(7)が満足されれば常に成立する。

$$\int_V\bar{u}^{(2)}\bar{X}^{(1)}dV+\int_{\partial V}\bar{u}^{(2)}N\bar{u}^{(1)}dS=\int_V\bar{u}^{(1)}\bar{X}^{(2)}dV+\int_{\partial V}\bar{u}^{(1)}N\bar{u}^{(2)}dS \tag{9}$$

次に, 式(3)およびこれに対応した微分方程式を考える。

$$L[\Gamma(P,Q;\nu)]=-\delta(P-Q)\quad,\ \text{i.e.}\ L_i^l[\Gamma_\alpha^i(P,Q;\nu)]=-\delta_\alpha^l\delta(P-Q) \tag{10}$$

ここに P, Q は観測点, 源点を, $\delta(P-Q)$ はベクトルdelta functionを表わすものとする。式(10)を満す解 $\Gamma(P,Q;\nu)$ は, 微分方程式(3)の主要解, または基本特異解と呼ばれる。

さて, 式(6), (8) に於て, $\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}$ の代りに, $\bar{u}(P;\nu)$, $\Gamma(P,Q;\nu)=\Gamma(Q,P;\nu)$ を代入すると, 次のように基本積分方程式が求められる。

$$\bar{u}_\alpha(P;\nu)F(P)=\int_V\Gamma_{l\alpha}(Q,P;\nu)\bar{X}^l(Q;\nu)dV+\int_V C_{ij}^{kl}(Q)\{\bar{u}_l(Q;\nu)|_k\Gamma_\alpha^i(Q,P;\nu)|^j-\bar{u}^i(Q;\nu)|^j\Gamma_{l\alpha}(Q,P;\nu)|_k\}dV$$
$$+\int_{\partial V}C_{ij}^{kl}(R)\{\Gamma_{l\alpha}(R,P;\nu)\bar{u}^i(R)|^j-\bar{u}_l(R)\Gamma_\alpha^i(R,P;\nu)|^j\}n_k dS \tag{11}$$

$$\bar{u}(P;\nu)F(P)=\int_V\Gamma(Q,P;\nu)\bar{X}(Q;\nu)dV+\int_{\partial V}\{\Gamma(R,P;\nu)N\bar{u}(R;\nu)-\bar{u}(R;\nu)N\Gamma(R,P;\nu)\}dS \tag{12}$$

ここに,

$$F(P)=\begin{cases}1 & ,\ P\in V\\ 1/2 & ,\ P\in\partial V\\ 0 & ,\ P\notin V,\ P\notin\partial V\end{cases}$$

, R は境界 ∂V 上の点を意味する。

特に, 微分方程式が同次形の場合, i.e. $L\bar{u}(x,\nu)=0$, には, 上式の右辺第1項は0となる。

3. 数値計算方法

式(11),(12)で与えられる基本積分方程式を解析的に解くことは困難であるので, これを代数方程式に変換して数値的に解かざるを得ない。境界 ∂V を N 個の部分に分割し, その部分では, $\bar{u}(R;\nu)$, $N\bar{u}(R;\nu)$ などは一定であると仮定すると, 例えば式(12)は次のように近似される。

$$\frac{1}{2}\bar{u}(R_m;\nu)=\int_V\Gamma(Q,R_m;\nu)\bar{X}(Q;\nu)dV+\sum_{n=1}^{N}N\bar{u}(R_n;\nu)\int_{\partial V}\Gamma(R,R_m;\nu)dS-\sum_{n=1}^{N}\bar{u}(R_n;\nu)\int_{\partial V}N\Gamma(R,R_m;\nu)dS \tag{13}$$

ここに, R_m, R_n は分割した境界面の中心を表わすものとする。

式(13), すなわち, 式(12), (11) などは, 基本特異解 $\Gamma(Q,P;\nu)$ が与えられれば, 境界上の $\bar{u}(R;\nu)$, $N\bar{u}(R;\nu)$ などに関して解くことができ, 従って V 内の点の $\bar{u}(P;\nu)$ は, 式(11), (12)に於て $F(P)=1$ として, 容易に求められる。$\bar{u}(P;\nu)$ が求まれば, Laplaceの逆変換を行なうことにより $u(P;t)$ が求められることになる。

なお, 具体的な適用例については, 当日言及することにする。