I－6　　　固有値問題の分割解法に関する研究

京都大学　正　員　小西一郎　京都大学　正　員　白石成人
京都大学　正　員　谷口健男　京都大学○学生員　古田　均

1．まえがき

構造物を設計する場合、外力による動的効果を考慮しなくてはならない。そこでは、まず構造物の振動性状を知ることが要求され、固有値、固有ベクトルを求めなければならない。しかし、現在のように構造物が巨大化すると、その固有値、固有ベクトルを求めるには多くの労力が必要となる。実際の計算では電子計算機が用いられるが、この場合も計算時間、記憶容量という点で問題が生じる。本研究では構造系を部分系に分割をし、その個々の部分系の固有値、固有ベクトルを利用することにより全体系の固有値、固有ベクトルを求めることを研究し、その利点を探る。ここでは、最初に分割による特性方程式の縮合されに形を示し、次にこれとG. H. Kronのいう Intersection Network との関連について述べ、最後に2つの分割法について説明をする。

2．基礎式の誘導

Damping項を無視すると特性方程式は次式のようになる。

$$(K-\lambda M)x=0 \tag{1}$$

K：剛性行列　M：質量行列（ここではLumped Massとして扱っている）λ：$\lambda=\omega^2$　x：変位ベクトル

いま系を2つの部分系に分割をするとその剛性行列Kは

$$K=\begin{bmatrix} A_1^t K_1 A_1, & 0 \\ 0 & , A_2^t K_2 A_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & , A_1^t K_1 A_{12} \\ A_{12}^t K_1 A_1 & , A_{12}^t K_1 A_{12} \end{bmatrix} \tag{2}$$

ここでAはBranch Node Incidence Matrix、またおのおのの suffix は各部分系とその間の部材を表わす。以下計算を簡単にするために(2)式の右辺第1項をK_S、第2項をK_Iとすると、(1)式は

$$(K_S-\lambda M)x=-K_I x$$

よって
$$x=-(K_S-\lambda M)^{-1}K_I x \tag{3}$$

ここで(3)式を(1)式に代入しなおすと

$$[I+K_I(K_S-\lambda M)^{-1}]K_I x=0 \qquad (I:\text{unit matrix}) \tag{4}$$

(4)式の解は
$$\det[I+K_I(K_S-\lambda M)^{-1}]=0 \tag{5}$$

より求まることになる。

ここで部分系に関する項$(K_S-\lambda M)^{-1}$は Modal Matrix を用いることにより対角化でき、(5)式の計算は部分系間を結合している部材についてのみ行われるので、その行列の次元は著しく減少することになる。いま$F_\lambda=(K_S-\lambda M)^{-1}$（flexibility）は Modal Matrix L を用いて次のように求めることができる。

$$F_\lambda=(K_S-\lambda M)^{-1}=L(\tilde{K}_S-\lambda\tilde{M})L^t \tag{6}$$

ここで$\tilde{K}_S$，$\tilde{M}$は対角行列（primitive matrix）であり、F_λの(i,j)要素$F_{\lambda ij}$は

$$F_{\lambda ij}=\sum_{k=1}^{N}\frac{L_{ik}L_{kj}}{\lambda_k-\lambda} \qquad (N：\text{系の節点数}) \tag{7}$$

そして(5)式より λ が求まれば元の系の固有ベクトルは、(3)(4)式を用いて容易に計算することができる。

3. Intersection Network との関連

G.H.Kronは電気回路網理論において Intersection Network を次のように定式化している。

$$Z_4 = Z + Z_4' \qquad (8)$$

Z_4 : Intersection Network の Impedance
Z : subsystem 間を結ぶ部材の Impedance
Z_4' : Bare Intersection Network の Impedance

いま(5)式の剛性行列のかわりに flexibility Matrix F が求まっていたとすると(5)式は

$$\det [F_I + F_\lambda] = 0 \qquad (9)$$

となり、F_I が Z と F_λ が Z_4' にそれぞれ対応することとなり、Intersection Network の Impedance を0とすることは(9)式の行列式を解くことに一致する。

4. 分割法

実際に構造物を分割して解析する場合、2つの方法が考えられる。1つは(5)式より明らかなように部材について分割を行なうものであり、もう1つは節点に注目して分割を行なうものである。(5)式をみると扱うべき行列の次元は剛性行列 K_I に依存している。この K_I は部分系を結合する部材に関するものであるから、この部材を少なくするように分割することが望しい。そこで、この部材を0にするつまり、節点での分割を行なうと行列の次元は最小になると考えられる。しかし、このことは一概には言えずどちらの分割法をとることが有利かということは、構造物の形式に依存することになる。いま、図1.2のモデルを考える。図1の場合は節点での分割を行なっても各部分系は独立なものとして存在し、部材分割よりも明らかにその次元は小さくなる。しかし、図2の場合部材分割と同じ分割Patternをとると上層の部分系は不安定となりその解析は行えず、d)の分割Patternをとることになり部材分割の方が有利となる。

図1 Example 1

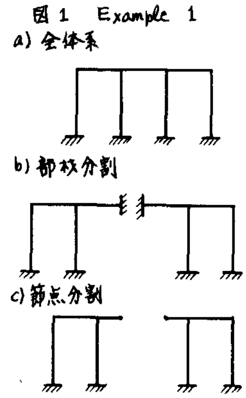
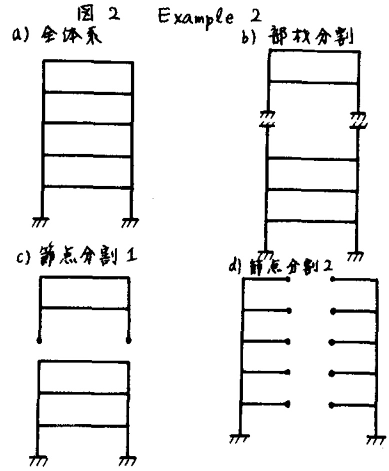


図2 Example 2



5. 結論およびあとがき

以上のことからIntersection Networkに注目し、適当な分割パターンを用いることにより固有値問題で取り扱うべき行列の次元は著しく減少し、容量の縮小が期待できる。そして実際の構造物を作る時、各ブロックに分けて作られ後に結合されることが多いことを考えると、架設中の安全性をcheckしながら全体系の振動性状が求まることになる。また計算時間も反復法をうまく用いることにより短縮が期待できると思われる。

(参考文献) 1) G. H. Kron, "Diakoptiks", Macdonald 1965
2) 平井, 柏本 "一部修正された振動系の固有値とその部材変数に対する変化率の決定手法について" 第26回 橋梁.構造工学研究発表会 1973