

京都大学工学部 正員 山田 善一
 京都大学工学部 正員 渡辺 英一
 日本鋼管 正員 中村 公信

§1 まえがき

本研究の目的は、構造物の幾何学的非線形解析にFEMを適用した場合の定式化を行ない、その結果をcomputer programに組んで数値解析を試みることにある。なお変形の表示はLagrangian description, 座標は右手系を用いる。FEM modelとしてはbeam element (2節点, 6自由度) およびrectangular plate element (4節点, 20自由度) を用い、非線形連立方程式の解法としてはperturbation, Newton, modified Newton methodを用いる。

§2 FEMによる定式化

$$\begin{cases} \text{shape fn.} & : f_i = A_{ij} u_j \\ \text{strain} & : \varepsilon_i = B_{ij} u_j + B_{ijk} u_j u_k \\ \text{stress-strain relations} & : \sigma_i = D_{ij} \varepsilon_j \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$\text{i) energy eq.} \quad : U = \int_V \varepsilon \sigma_i d\varepsilon_i dV \equiv \frac{1}{2} K_{ij}^* u_i u_j \quad (4)$$

$$\text{ii) equilibrium eq.} \quad : P_i = \frac{\partial U}{\partial u_i} \equiv K_{ij}^{**} u_j \quad (5)$$

$$\text{iii) tangential incremental eq.} \quad : \dot{P}_i = \frac{\partial P_i}{\partial u_j} \dot{u}_j \equiv K_{ij}^{***} \dot{u}_j \quad (6)$$

$$\text{iv) secant incremental eq.} \quad : \Delta P_i = \frac{P_i(u+\Delta u) - P_i(u)}{\Delta u_j} \Delta u_j \equiv \tilde{K}_{ij} \Delta u_j \quad (7)$$

ここに

$$\begin{cases} [K^*] = [K^0] + \frac{1}{2} [K^I] + \frac{1}{6} [K^{II}] \\ [K^{**}] = [K^0] + \frac{1}{2} [K^I] + \frac{1}{3} [K^{II}] \\ [K^{***}] = [K^0] + [K^I] + [K^{II}] \\ \tilde{K}_{ij} = K_{ij}^{***} + \left(\frac{1}{2} K_{ijk} + K_{ijke} u_e \right) \Delta u_k + \left(\frac{1}{3} K_{ijkle} \right) \Delta u_k \Delta u_l \end{cases} \quad \begin{cases} K_{ij}^0 = K_{ij} \\ K_{ij}^I = K_{ijk} u_k \\ K_{ij}^{II} = K_{ijkle} u_k u_l \end{cases} \quad \begin{cases} K_{ij} = \int_D D_{ip} B_{aj} B_{pj} dV \\ K_{ijk} = 6 \int_D D_{ip} B_{aj} B_{pk} dV \\ K_{ijkle} = 6 \int_D D_{ip} B_{aj} B_{pk} dV \end{cases} \quad (8)$$

§3 非線形連立方程式の解法

i) perturbation method : 式(7)の増分量をperturbation parameter ε で展開して ε の次数ごとに整理すれば線形化された漸化式を得る。その係数行列 $[K]$ はすべて共通であるから逆行列演算は一度だけでよい。系の自由度を N とすれば $[K], [K^I], [K^{II}]$ のrankは通常ともに N であるが、飛移点では $(N-1)$, N , 分岐点では $(N-1), (N-1)$ となる。したがって飛移点では荷重制御、分岐点では特別のperturbationが必要となる。

ii) Newton method : 式(5)にNewton methodを適用して荷重制御の場合、

$$\{u^{(n+1)}\} = \{u^{(n)}\} - [K^{***}(u^{(n)})]^{-1} \{ [K^{**}(u^{(n)})] \{u^{(n)}\} - \{P\} \} \quad (9)$$

iii) linear incremental method : 式(5)をTaylor展開して線形化すると荷重制御の場合、

$$\{u\} = \{u_0\} + [K^{***}(u_0)]^{-1} \{\Delta P\} \quad (10)$$

$$\{u\} = \{u_0\} + [K^{***}(u_0)]^{-1} \{ \Delta P - ([K^{**}(u_0)] \{u_0\} - \{P_0\}) \} \quad (11)$$

式(10)は式(9)の $\tilde{K}$ を式(6)の K^{***} で代用したにすぎない。これでは誤差が累積するので式(11)のような修正が必要となる。式(11)の右辺の()内は物理的には線形化(10)により生じた不平衡力を意味する。したがって現stepでの正味の荷重増分は ΔP のほかにこの不平衡力を

逆向きに作用させておく必要がある。なお、この手法は式(9)と比較すれば明らかなように Newton method の収束計算をただ一回行なった後、収束判定なしで次の step に進むという方法であり、modified Newton method と呼ぶことができる。

§4 数値解析例
 Fig.1: 梁の軸圧縮 Fig.2: 板の等分布横荷重満載 Fig.3: 板の面内圧縮 Fig.4: 板の面内剪断
 (ただし、梁は両端回転支持、板は Fig.2 が周辺固定、Fig.3,4 が周辺回転支持。初期たわみはすべて parabola。Poisson's ratio: $\nu=0.3$ 。板はすべて perturbation method による。)

§5 あとがき
 ①本研究で用いた beam element および rectangular plate element の場合、式(8)の種々の stiffness はすべて 4 種類の stiffness: $K_{ij}^P, K_{ij}^B, K_{ijk}^{PB}, K_{ijkle}^{BB}$ で表わすことができる。しかも基本式(4)~(7)は両者とも同じ形となる。これは大きな利点である。たとえば

$$U = \frac{1}{2} K_{kl}^P u_k^E u_l^E + \frac{1}{2} K_{kl}^B w_k^E w_l^E + \frac{1}{2} K_{kmn}^{PB} u_k^E w_m^E (2w_n^I + w_n^E) + \frac{1}{2} K_{klmn}^{BB} w_k^E w_l^E (w_m^I w_n^I + w_m^E w_n^E + \frac{1}{4} w_m^E w_n^E) \quad (12)$$

 ②無次元増分量を 0.05 程度以下であれば、§3 のどの手法を用いても、ほとんど同じ精度の解を得ることができた。

