

有限要素法による構造物の幾何学的非線形解析

京都大学工学部 正員 山田善一
 京都大学工学部 正員 渡辺英一
 日本鋼管 正員 中村公信

§1 まえがき

本研究の目的は、構造物の幾何学的非線形解析に FEM を適用した場合の定式化を行ない、その結果を computer program に組んで数値解析を試みることにある。なお、変形の表示は Lagrangian description、座標系は右手系を用いる。FEM model としては beam element (2 節点 6 自由度) および rectangular plate element (4 節点 20 自由度) を用い、非線形連立方程式の解法としては perturbation, Newton, modified Newton method を用いる。

§2 FEMによる定式化

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{shape fn.} \\ \text{strain} \\ \text{stress-strain relations} \end{array} \right. : \begin{array}{l} f_i = A_{ij} u_j \\ \varepsilon_i = B_{ij} u_j + B_{ijk} u_j u_k \\ \sigma_i = D_{ij} \varepsilon_j \end{array} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{strain} \\ \text{stress-strain relations} \end{array} \right. : \begin{array}{l} \varepsilon_i = B_{ij} u_j + B_{ijk} u_j u_k \\ \sigma_i = D_{ij} \varepsilon_j \end{array} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{stress-strain relations} \end{array} \right. : \begin{array}{l} \sigma_i = D_{ij} \varepsilon_j \end{array} \quad (3)$$

$$\text{i) energy eq.} : U = \int_V \int_E \sigma_i d\varepsilon_i dV \equiv \frac{1}{2} K_{ij}^* u_i u_j \quad (4)$$

$$\text{ii) equilibrium eq.} : P_i = \frac{\partial U}{\partial u_i} \equiv K_{ij}^{**} u_j \quad (5)$$

$$\text{iii) tangential incremental eq.} : P_i = \frac{\partial U}{\partial u_i} \dot{u}_j \equiv K_{ij}^{***} \dot{u}_j \quad (6)$$

$$\text{iv) secant incremental eq.} : \Delta P_i = \frac{P_i(u+\Delta u) - P_i(u)}{\Delta u_i} \Delta u_j \equiv \tilde{K}_{ij} \Delta u_j \quad (7)$$

$\approx 1 <$

$$\left[\begin{array}{c} [K^*] = [K^0] + \frac{1}{3} [K^x] + \frac{1}{6} [K^y] \\ [K^{**}] = [K^0] + \frac{1}{2} [K^x] + \frac{1}{3} [K^y] \\ [K^{***}] = [K^0] + [K^x] + [K^y] \end{array} \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} K_{ij}^0 = K_{ij} \\ K_{ij}^x = K_{ijk} u_k \\ K_{ij}^y = K_{ijke} u_k u_e \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} K_{ij} = \int D_{ijk} B_{ai} B_{pj} dV \\ K_{ijk} = 6 \int D_{ijk} B_{ai} B_{pj} dV \\ K_{ijke} = 6 \int D_{ijke} B_{ai} B_{pk} dV \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\tilde{K}_{ij} = K_{ij}^{***} + \left(\frac{1}{2} K_{ijk} + K_{ijke} u_e \right) \Delta u_k + \left(\frac{1}{3} K_{ijke} \right) \Delta u_k \Delta u_e$$

§3 非線形連立方程式の解法

i) perturbation method : 式(7)の増分量を perturbation parameter ε で展開してその次数ごとに整理すれば線形化された漸化式を得る。その係数行列 $[K]$ はすべて共通であるから逆行列演算は一度だけである。系の自由度を N とすれば $[K], [K^{**}], [K^{***}]$ の rank は通常ともに N であるが、飛移点では $(N-1), N$ 、分歧点では $(N-1), (N-1)$ となる。したがって飛移点では荷重制御、分歧点では特別な perturbation が必要となる。

ii) Newton method : 式(5)に Newton method を適用して 荷重制御の場合、

$$\{u^{(n+1)}\} = \{u^{(n)}\} - [K^{**}(u^{(n)})]^{-1} \{[K^{**}(u^{(n)})] \{u^{(n)}\} - \{P\}\} \quad (9)$$

iii) linear incremental method : 式(5)を Taylor 展開して線形化すると 荷重制御の場合、

$$\{u\} = \{u_0\} + [K^{**}(u_0)]^{-1} \{\Delta P\} \quad (10)$$

$$\{u\} = \{u_0\} + [K^{**}(u_0)]^{-1} \{\Delta P\} - ([K^{**}(u_0)] \{u_0\} - \{P_0\}) \quad (11)$$

式(10)は式(9)の \tilde{K} を式(6)の K^{**} で代用したにすぎない。これでは誤差が累積するので式(11)のような修正が必要となる。式(11)の右辺の () 内は 物理的には 線形化(10)により生じた不平衡力を意味する。したがって現 step での正味の荷重増分は ΔP のほかに ニュートン法による不均衡力

逆向きに作用させておく必要がある。なお、この手法は式(9)と比較すれば明らかのように Newton method の収束計算をただ一回行なった後、収束判定なしで次の step に進むという方法であり、modified Newton method と呼ぶことができる。

§4 数値解析例

Fig.1: 梁の軸圧縮 Fig.2: 板の等分布横荷重満載 Fig.3: 板の面内圧縮
の面内剪断 (ただし、梁は両端回転支持、板は左端が周辺固定、Fig.3,4が周辺回転支持。
初期たわみはすべて parabola。 Poisson's ratio: $\nu = 0.3$ 。板はすべて perturbation method による。)

§5 あとがき

i) 本研究で用いた beam element より rectangular plate element の場合、式(8)の種々の stiffness はすべて 4種類の stiffness: $K_{ij}^P, K_{ij}^B, K_{ijk}^B, K_{ijkl}$ で表わすことができる。しかも基本式(4)~(7)は两者とも同じ形となる。これは大きな利点である。たとえば

$$U = \frac{1}{2} K_{kl}^{E,E} u_k^E u_l^E + \frac{1}{2} K_{kl}^B w_k^E w_l^E + \frac{1}{2} K_{kmn}^{PB} u_k^E w_m^E (2w_n^I + w_n^E) + \frac{1}{2} K_{kmn}^{BB} w_k^E w_l^E (w_m^I w_n^I + w_m^E w_n^E) + \frac{1}{4} w_m^E w_n^E \quad (12)$$

ii) 無次元増分量とは 0.05 程度以下であれば、§3 のどの手法を用いても、ほとんど同じ精度の解を得ることができた。

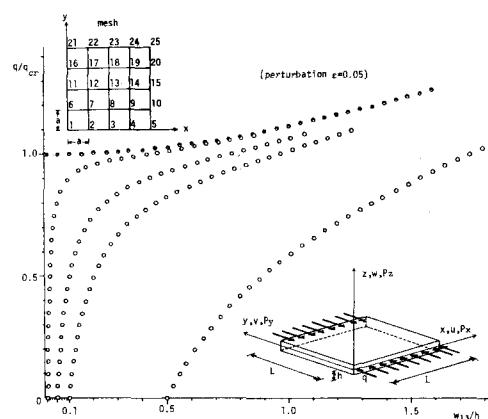
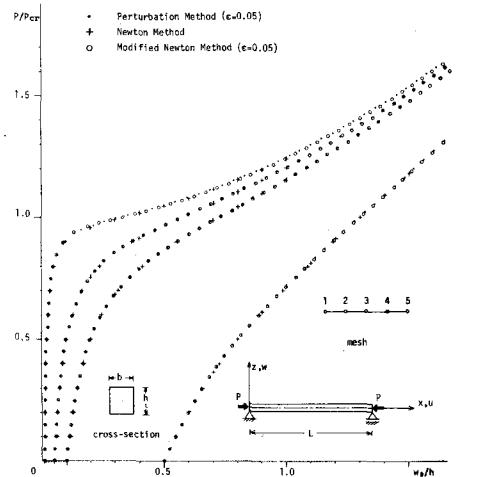


Fig.
1 | 2
3 | 4

