I－3　骨組構造物の剛性行列の帯幅減少に関する一考察

京都大学工学部　正員　小西　一郎
京都大学工学部　正員　白石　成人
京都大学工学部　正員　谷口　健男
京都大学大学院　学生員○横田　信録

1. まえがき

近年電子計算機の発達とともに骨組構造物にマトリックス構造解析が適用されるようになってきた。そのためには剛性行列の逆行列をとる必要があるが、計算機容量、計算時間等の制約のため、大行列の逆行列をとるには多くの困難が伴なう。しかし剛性行列には零要素が多いので、非零要素を対角部に集中することにより容量、計算時間を減少させることができる。よって本研究では、剛性行列の帯幅を最小にする、構造物の節点番号付けについて考察する。ここでは特にTree Systemについて述べる。Treeとはある点から出てその点へもどる閉じた道、すなわちmeshを持たないグラフのことである。

Tree Systemに節点番号を付ける方法として、Sequential File Methodを用いる。これは図式解法であり、設計者がある番号付けの最適、非最適を目で見て判断できるという長所を持っている。ここでは集中点が4つまでのTree SystemへのSequential File Methodについて説明する。

2. Sequential File Method

構造物をグラフと考えてFiling Fieldに配置するのであるが、まずFiling Fieldについて説明する。Fieldは上下方向の平行線と左右方向の平行線で構成されており、節点は二種類の平行線の交点にのみただ一個おく事ができる。以後縦に並んだ点列を列、横を行と呼ぶことにする。このFieldの最下行に構造物の仮想直径を置く。

Field上での番号付けの順序は、最右列の一番上の点より始めて上から下へ、右の行から左の行へ順に点番号を付けていく。

各点は仮想直径及びその延長線の上部に、許されるかぎり密に存在するように配置される。その時、仮想直径より上にある行数のうちで最高のものをhとすると、この構造物の最小H.B.W.(Half Band Width)は次式で表わされる。

$$H.B.W. = h + 2 \qquad (1)$$

ただし上式が満足されるためには、以下に述べる制約にしたがって、グラフをField上に配置する必要がある。

骨組構造物は連結グラフとなるので、一つの点は必ず一個以上の他の点と結ばれている。Field上である一つの点と接続される点は、その点を含む列及びその左右の列にのみ存在でき、その接続方向は上下左右、及び右下り、左上りに限られる。このようすを図1に示す。もちろん下からh番目より上の行には点をおかないものとする。このようにすれば任意の一つのBranchで結ばれた2個の点の間の節点番号の差は常に$h+1$以下になり。従っ

て式1が満足される。

例として一個の集中点を持つTree Systemをとる。この場合には、仮想直径は最長点列と次に長い点列で構成され、すなわち実際の直径となる。ここでhを最小にするには、h_1本の点列を集中点上から右へ、残りの点列を集中点の一つ左の点上から左へ配置すればよい
ここでh_1は、mを集中点の直径を除いた次数として

$$h_1 = m - [m/2] \quad (2)$$

と表わされ、$h_1 = h$となる。すなわち一つの集中点を持つTree Systemの最適H.B.W.は集中点の次数のみで決り

$$H.B.W. = m - [m/2] + 2 \quad (3)$$

となる

3、集中点の数が2〜4個のTree System

集中点の個数が3の場合から考える。これを図2に示す。ここで仮想直径は、集中点1、2、3を結ぶ線と、点1に接続する点列中の最長のもの、及び点3に接続する点列中の最長のもので構成される。各集中点の直径を除く次数をm_iとすると、前節で述べたように、各集中点において、最低h_i本の行が必要となる。ここでh_iは

$$h_i = m_i - [m_i/2] \quad (4)$$

ここでまず点1、3においてそれぞれ長い方からh_1、h_3本の点列をd_1上及びd_4上へ配置する。次にComparison Tableを使って残っている点の内でd_1上及びd_4上へ配置するものを決める。Comparison Tableとは点列の長さをその接続している点の違いを考慮して比較するもので、ある基準点から右方又は左方への各点列の長さを図示したものである。すなわち基準点以外の集中点に属する点列は、2集中点間の距離だけ差引いた長さで表わされる。ただし$h_i = h$の集中点があればその点より遠い点に属する点列は無視される。ここでhは最初h_iの最大値をとる。この作業は点1、3で行なわれ、それぞれグラフ上で長い方から、$h-h_1$本、$h-h_3$本の点列がd_1上、d_4上に配置される。この結果点1、3間に配置すべき点数は考えうる最小の値になっているはずである。いま点1に属する点列でd_1上に配置したものの本数を$h_1+\Delta h_1$、点3に属する点列でd_4上に配置したものの本数を$h_3+\Delta h_3$とすると、hの値を変えずにまだ配置しうる点の数Cap.1〜3は次式で表わされる。

$$Cap.1\sim3 = d_2 \times (h_1 + \Delta h_1) + d_3 \times (h_3 + \Delta h_3) \quad (5)$$

よって残っている点の総数nがCap.1〜3より多ければ、少くとも$n \leq Cap.1\sim3$となるようにhをΔhだけ増やしてこれまでの操作を再度繰り返す。Δhはd_1上及びd_4上で最小の長さをもつ点列をd_1^m, d_4^mとして次式で表わされる。

$$\Delta h = [(n - Cap.1\sim3)/(d_1^m + d_2 + d_3 + d_4^m)] + 1$$

$n \leqq Cap.1\sim3$であってもhを増加させる必要のある場合がある。それはd_2上又はd_3上に点を置くことができない空間が生じる場合で、例えばd_2上に空間が生じる場合としては、

1、点1に属する点でまだ配置されていない点数S_1が$Cap.1\sim2 = d_2 \times (h_1 + \Delta h_1)$より小さく

2、点2を基準とした残りの点列のComparison Tableから最適なr本を選んでも$Cap.1\sim2 - S_1$を満たし切れない場合で、ここにrは2に属しまだ配列されていない点列の本数をm_2

とするとき．次式を満足せねばならない

$$m_2' - [m_2'/2] \leqq k \leqq h_1 + \Delta h_1$$

この場合にもhの値を増加させて再度前述の手順を実行する。

4つの集中点が直列に並んでいる場合を考える（図3参照）まず式4を用いてh_iを計算してそのうちの最大なものをhにとる。次に点1、4に関するComparison Tableを用いて点1,4の外側に配置する点列を先ず確定させる。そして残りの点がCap1〜4に入り得るかを検討する。入り得ない場合はhを増加させて再度行い、入り得る場合は点1，4に属する点列でまだ配置されていない点数$\bar{S}_1$，$\bar{S}_4$を計算し、点2，3に関するComparison Tableを用いてCap1〜2 Cap.3〜4を最もすき間なくうめるように，α_2上α_4上に点を配置し残りの点がCap2〜3内におさまるかどうか検討する。おさまらない場合はhを増加させて最初からやりなおす。おさまった場合は　式1よりH.B.W.が求められる。

4．あとがき

直列4集中点までの節点番号付けについて説明したわけであるが、このSequential File Methodは、その手順を言葉で書くと複雑であるが、実際に行なう場合は、目で見ることによりある程度省略することができ、又一つの番号付けができた時にそれが最適であるかどうかの検討は、残されている空間を何らかの方法で満たしうるかどうか、又満たし得たとしてもその事により行数の減少が得られるかどうかにより簡単に判断しうる。

厳密な最適解を得るには前述のようにある程度複雑な手順を要するので集中点の数が増加すると非常に複雑になると予想されるので点をBlock毎にまとめて考える方法が有効ではないかと考えられる。これはある集中点に属する点は、次数を満足させる行数があれば、その点を下辺上に持つ1つの長方形内に配列され得るということを利用する方法である。次数をmとすれば、長方形の高さhは次式の範囲で任意に決め得る。

$$m - [m/2] \leqq h \leqq n \qquad \text{ただし } n \text{ は点総数である}$$

高さをhとすれば下辺の長さはn/h又は$n/h+1$になる。又下辺上での集中点の位置にはある程度の自由度が存在する。よってある高さhを仮定して、各集中点上に長方形をつくり、できるだけ重なる部分が少なくなるようにする。重なる部分がある場合には、その部分について前述の方法を採用すれば、近似解が得られる。又　集中点が4つの場合でも4個の集中点が直列でない時には、Blockの考えを利用して一つの集中点を他の3つの集中点の間に配置して直列4集中点として解析する方法が考えられるが、多集中点の場合の誤差の程度の問題とともに今後の研究が必要であると考える。

〔参考文献〕第20回橋梁構造工学研究発表会 P75〜P82 ，1973

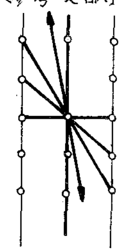

図1 許容接続方向

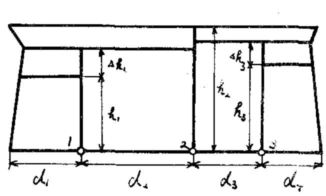

図2．3集中点系

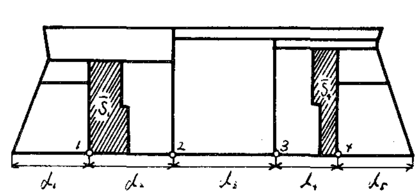

図3．直列4集中点系