

立体骨組構造物の大変形解析

大阪大学工学部 正員 前田幸雄

大阪大学工学部 正員 林 正

大阪大学大学院 学生員 〇中村 守

1. まえがき 立体骨組構造物の大変形解析においては、平面構造の場合に対して、ねじり、そりの問題とともに空間内での回転変位の把握という問題が新たに生じる。本文では、曲げ剛性、ねじり剛性を有し、そり変形の影響を無視できる部材で構成される構造物の大変形解析に関して、変位の2次項を含む部材の剛性行列を誘導するとともに、空間における節点の回転変位を回転行列により正確に把握して座標変換を行なう過程について報告する。

2. 大変形解析 (1) 解析仮定 本文の解析で用いた仮定は、次のとおりである。

- i) 各部材の断面は、長さ方向に一樣でかつ2軸対称とし、断面形状は不変とする。
- ii) 構造物の変形は大きいが、部材の接線回転角と両端の相対ねじり角は小さいとする。
- iii) 曲げによるセリ断変形は無視する。
- iv) ねじり率は、部材内部で一定とする。すなわち、そり拘束の影響は無視する。

(2) 剛性行列 剛性行列は、Castiglianoの第一定理より部材の歪エネルギー U と材端変位 δ で微分して得られる。ここで歪エネルギーは、直歪 ε_x については変位の2次項まで考慮し、セリ断歪については線型項のみ考えると、次式で表わされる。

$$U = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon_x^2 dV + \frac{GJ}{2} \int_L (\theta')^2 dx \quad (\text{但し } \theta' \text{ はねじり率である。}) \quad (1)$$

(3) 回転変位と座標変換 有限な回転は、ベクトルとして分解・合成できないため、通常の座標変換行列によって、節点の回転変位と材端変位を関係づけることはできない。本文では、節点の回転変位は、変形前に節点で基準座標軸方向に固定され、節点と同じ運動をする直交3軸の基準座標系に対する方向余弦により構成される回転行列 R で定義する。 R は、 $\Delta F = K \cdot \Delta D$ を解いて得られる変位増分のうち回転変位の増分 $\Delta D (= \{\Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z\})$ に対応する ΔR により、 $R_{n+1} = \Delta R \cdot R_n$ として求められる。 ΔR は、 ΔD が無限小の場合、(2)式で与えられるが、(2)式の ΔR は、正規直交行列にならないので、積算してゆくと誤差が累積する恐れがある。そこで、一つの軸 ΔD のまわりの有限な角 $\alpha (= |\Delta D|)$ の回転を表わす回転行列を導くと(3)式および(4)式のようになる。

$$\Delta R = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\theta_z & \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z & 1 & -\Delta\theta_x \\ -\Delta\theta_y & \Delta\theta_x & 1 \end{bmatrix} \quad \text{----- (2)}, \quad \Delta R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad \text{----- (3)}$$

$$\left. \begin{aligned} r_{11} &= (1 - \cos \alpha) \frac{(\Delta\theta_x)^2}{\alpha^2} + \cos \alpha & r_{12} &= (1 - \cos \alpha) \frac{\Delta\theta_x \Delta\theta_y}{\alpha^2} - \frac{\Delta\theta_z}{\alpha} \sin \alpha & r_{13} &= (1 - \cos \alpha) \frac{\Delta\theta_x \Delta\theta_z}{\alpha^2} + \frac{\Delta\theta_y}{\alpha} \sin \alpha \\ r_{21} &= (1 - \cos \alpha) \frac{\Delta\theta_x \Delta\theta_y}{\alpha^2} + \frac{\Delta\theta_z}{\alpha} \sin \alpha & r_{22} &= (1 - \cos \alpha) \frac{(\Delta\theta_y)^2}{\alpha^2} + \cos \alpha & r_{23} &= (1 - \cos \alpha) \frac{\Delta\theta_y \Delta\theta_z}{\alpha^2} - \frac{\Delta\theta_x}{\alpha} \sin \alpha \\ r_{31} &= (1 - \cos \alpha) \frac{\Delta\theta_x \Delta\theta_z}{\alpha^2} - \frac{\Delta\theta_y}{\alpha} \sin \alpha & r_{32} &= (1 - \cos \alpha) \frac{\Delta\theta_y \Delta\theta_z}{\alpha^2} + \frac{\Delta\theta_x}{\alpha} \sin \alpha & r_{33} &= (1 - \cos \alpha) \frac{(\Delta\theta_z)^2}{\alpha^2} + \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

さて、このような R を用いると、変形前に部材軸方向に $\bar{x}$ 、部材の主軸方向に $\bar{y}, \bar{z}$ 軸をとって材端に固定した材端部材軸 $\bar{\epsilon} (= \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\})$ の変形後の方向余弦 $\bar{\epsilon}_n$ は、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{na} &= R_i \cdot \tilde{C}_{qa} = R_i \cdot C_o & (C_o: \text{変形前の部材座標軸} (= \tilde{C}_{oa} = \tilde{C}_{ob})) \\ \tilde{C}_{nb} &= R_j \cdot \tilde{C}_{qb} = R_j \cdot C_o & (\text{又、材端 } a, b \text{ は、節点 } i, j \text{ に対応している。}) \end{aligned} \quad (5)$$

いま変形後の材端を結ぶ直線上に無応力状態の部材を考え、その軸 x, y, z が変形によって、 $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ の位置に移ったとすると、図-1(a)に示すように、材端 a において、 $\tilde{x}$ 平面と $\tilde{y}$ 平面の交線 $\tilde{z}$ は、この時の材端 a における部材の 2 軸曲げの軸と考えられ、曲げ変形によって動かないものゆえ、 $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ 系での $\tilde{z}$ 即ち $\tilde{z}$ とのなす角は、材端 a のねじり角 θ_a と考えられる。又、この角 θ_a は図からわかるように、 $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ 軸を $\tilde{z}$ 軸のまわりに τ だけ回転して $\tilde{x}$ を x に一致させた時に $\tilde{y}, \tilde{z}$ がなす位置 $\tilde{y}, \tilde{z}$ と、 x, y, z 軸のなす角に等しい。ゆえに図-1(b)に示すように $\tilde{C}_a, \tilde{C}_b$ が $\tilde{C}_a = -\tilde{C}_b$ となるように $\tilde{y}, \tilde{z}$ 軸を決め、これを変形後の部材軸 $\tilde{C}_n$ とする。即ち、 $\tilde{z}$ 軸まわりの τ なる回転を (3)(4) 式を用いて $\tilde{R}$ と表わせば、 $\tilde{C}_n$ は、次のようにして求まる。

$$\tilde{C}_{na} = \tilde{R}_i^t \cdot \tilde{C}_{qa}, \quad \tilde{C}_{nb} = \tilde{R}_j^t \cdot \tilde{C}_{qb} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} = \tilde{C}_{na}^t \cdot \tilde{C}_{nb} \quad (7)$$

$$C_n = \tilde{C}_{na} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

C_n が決まると、 $u (= \{u_a, u_b, u_n, \tilde{C}_a, \tilde{C}_b, \tilde{C}_n, u_b, u_b, u_b, \tilde{C}_b, \tilde{C}_b, \tilde{C}_b\})$ は次のように求まる。

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{a,b} &= (-n/l)_{a,b} & \text{ただし } \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} &= C_n^t \cdot \tilde{x}_{a,b} \\ \tilde{z}_{a,b} &= (m/l)_{a,b} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{又 } \theta_a = -\theta_b = -\theta, \quad \tilde{C}_a = \tilde{C}_b = \tilde{C}_n = \tilde{C}_n = 0, \quad u_b - u_a = L - L_o \quad (L_o, L: \text{変形前後の部材長}) \quad (10)$$

3. 数値計算例 図-2 に示すスーレンディール形式の構構を持つ放物線固定ジョイントに、軸線長当たり等分布の水平荷重 $q (= P_{cr}/500)$ を与えた上で、面内等分布荷重 P を増分してゆき、変形を追跡した。断面諸量は表-1 に示すとおりである。アーチクラウドの荷重変位曲線および $P/P_{cr} = 1.648$ の時の変形図を図-3 に示す。ここで P_{cr} は、面外座屈荷重であり、 $P_{cr} = 48.536$ である。

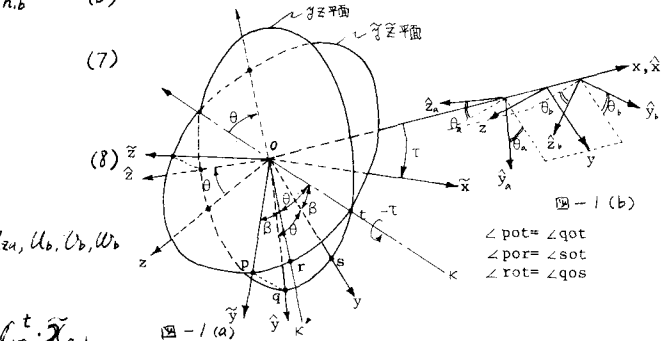


図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

図-1 (a) (b)

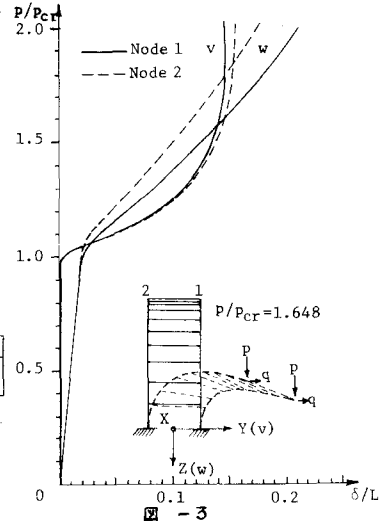
4. おまけ

本文で誘導した用

性行列および、回転変位と座標変換の取り扱いに関する計算過程によれば、立体骨組構造物の大変形問題に対し十分に正確な解が得られると思われる。

表-1

	EA	EL ₁	EL ₂	GJ
Arch rib	200000	2000000	800000	2400000
Cross beam	40000	100000	4000	1000



1) Tezcan, S.S., and Mahapatra, B.C., "Tangent Stiffness Matrix for Space Frame Members," ASCE, No. ST6, June, 1969.

2) Oran, C., "Tangent Stiffness in Space Frames," ASCE, No. ST6, June, 1973.

3) 結城皓暁「薄肉梁の幾何学的非線形解析」, 日本鋼構造協会第7回大会研究集会, マトリクス構造解析法研究発表論文集, 昭和40年6月