ネットワークにおける点と辺によるカットセットについて

大阪市立大学工学部　正員　○岡村治子
大阪市立大学工学部　正員　西村昂

1. まえがき

ネットワークのフロー問題を考えるとき、これまで辺の容量のみで制限を受ける場合については広く研究が行なわれてきたといえる。しかし道路網の交通流を考えるような場合は辺よりむしろそれらが集中する点における、すなわち交差点における交通容量が制限となる場合が多い。フロー問題を考える場合に最小カットは基本的に重要な役割を果たすが、ここでは従来考えられてきた辺のみのカットセットではなく、点をも含んだカットセットを考えるように拡張を試みた。以下に拡張されたカットセットの定義と定理、それを求めるアルゴリズムを述べ、簡単な例題を挙げておく。

2、拡張されたカットセットの定義と定理

点の set V と辺の set E とからなる連結ネットワーク $G=\langle V, E\rangle$ において、V の部分集合 A から生成される G の部分グラフを $\langle A\rangle$ であらわす。又 $A\cap B=\phi$ である V の部分集合 B に対して A の点と B の点とを結ぶすべての辺の集合を (A, B) であらわす。一般に集合 C の元の個数を $|C|$ であらわす。V の部分集合 V_0 と E の部分集合 E_0 に対して $\{V_0, E_0\}$ がカットセットであるとは、$V-V_0$ のある部分集合 X に対して $(X, V-(V_0\cup X))=E_0$ となり V_0 の各点は X のある点と、又 $V-(V_0\cup A)$ ($=Y$ とおく) のある点とも隣接しているときに言う。$\{V_0, E_0\}$ の部分集合にカットセットがないとき、$\{V_0, E_0\}$ を極小カットセットとよぶ。

[定理] $E_0\neq\phi$ であるカットセット $\{V_0, E_0\}$ が極小である必要十分条件は、$(X, V_0\cup Y)$ と $(X\cup V_0, Y)$ が極小カットセットであることである。

証明) 必要性：もし $(X, V_0\cup Y)$ が極小でないとすると $\langle X\rangle$ か $\langle V_0\cup Y\rangle$ のどちらかが非連結になる。$\langle V_0\cup Y\rangle$ が非連結のときは $\langle Y\rangle$ が非連結になるので、$\langle X\rangle$ が非連結としてよい。$E_0\neq\phi$ より $x\in X$, $y\in Y$ である E_0 の辺 (x, y) がある。$\langle X\rangle$ の連結成分で x を含むものを $\langle X_1\rangle$ とする。ここで $X_1\subset X$ である。$X-X_1=X_2$ とする。X_2 の点と隣接している V_0 の点の集合を V_1 とし、X_2 の点と隣接している E_0 の辺の集合を E_1 とする。$\{V_1, E_1\}$ はカットセットとなり、$\{V_0, E_0\}\supsetneqq\{V_1, E_1\}$ より $\{V_0, E_0\}$ の極小性に矛盾する。

十分性：$(X, V_0\cup Y)$ が極小より $\langle X\rangle$ は連結となり、$(X\cup V_0, Y)$ が極小より $\langle Y\rangle$ は連結となる。$\{V_0, E_0\}\supsetneqq^{\forall}\{V_2, E_2\}$ に対して、グラフ $\langle V-V_1, E-E_1\rangle$ は連結となり $\{V_1, E_1\}$ はカットセットにはならない。よって $\{V_0, E_0\}$ は極小である。

3、連結ネットワークの $V_0\neq\phi$, $E_0\neq\phi$ である極小カットセットを求めるアルゴリズム

辺のみによる極小カットセットを(1)によって求める。その各々は、V を2つの集合にわける。W を辺のみによる極小カットセットに対応する V の部分集合でその個数が $|V|-2$ 以下のものからなる集合族とする。$W=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$、$1\leq|a_1|\leq|a_2|\leq\cdots\leq|a_k|\leq|V|-2$ とする。

step 1. $T=\phi$、$i=1$ とする。

step 2　a_iの点と隣接する$V-a_i$の点の集合をQとする。

step 3　$|U|<|V|-2|a_i|$である$U\subsetneq Q$に対して$U\cup a_i\in W$であれば$\{U,(a_i,V-(U\cup a_i))\}$を$S$に入れる。

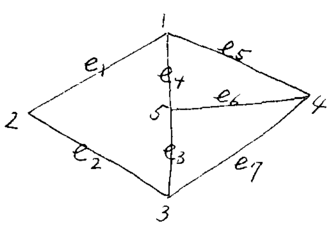
step 4　$|U|=|V|-2|a_i|$である$U\subsetneq Q$に対して$U\cup a_i\in W$であり、$V-(U\cup a_i)\notin T$であれば$\{U,(a_i,V-(U\cup a_i))\}$を$S$に入れる。

step 5　$W=W-a_i$とおき、$T=T\cup a_i$とおきなおす。

step 6　$i=i+1$とおき　$|a_i|<\frac{|V|}{2}$であればstep 2へもどる。$|a_i|\geq\frac{|V|}{2}$であればstop.
このときSは$V_0\neq\phi$, $E_0\neq\phi$であるすべての極小カットセットからなる。

証明）Qの取り方よりUの各点はXのある点と隣接し、又$(a_i,V-a_i)$が極小より$V-(U\cup a_i)$のある点とも隣接しており$\{U,(a_i,V-(U\cup a_i))\}$はカットセットになる。又極小であることは定理からわかる。逆に任意の極小カットセットはSに含まれることを示す。$|X|\leq|Y|$とする。$X=a_i$となるiがある。V_0の点はXのある点と隣接しているので$V_0\subset Q$となる。もし$V_0=Q$なら$E_0=\phi$となるので$V_0\neq Q$。$|X|<|Y|$の場合は$|V_0|=|V|-|X|-|Y|<|V|-2|a_i|$よりstep 3において$\{V_0,E_0\}\in S$となる。$|X|=|Y|$の場合は$|V_0|=|V|-2|a_i|$となりstep 4において$Y\notin T$ならば$\{V_0,E_0\}\in S$となり、$Y\in T$ならば$a_i=Y$のstep 4において$\{V_0,E_0\}\in S$となる。

4. 例



$G=\langle V,E\rangle$, $V=\{1,2,3,4,5\}$, $E=\{e_1=(1,2),\ e_2=(2,3)$, $e_3=(3,5)$, $e_4=(1,5)$, $e_5=(1,4)$, $e_6=(4,5)$, $e_7=(3,4)\}$を考える。極小カットセット$\{e_1,e_4,e_5\}$に2つの頂点の集合$\{1\}$, $\{2,3,4,5\}$が対応する。(1)によって$V_0=\phi$のときの極小カットセットが求められ、これよりWが求められる。

$W=\{\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}\{5\}\{1,2\}\{1,4\}\{1,5\}\{2,3\}\{4,5\}\{3,5\}\{3,4\}\{1,2,3\}\{1,2,4\}\{2,3,4\}$
$\{1,2,5\}\{2,3,5\}\{1,4,5\}\{3,4,5\}\}$

$i=1$, step 2, $a_1=\{1\}$, $Q=\{2,4,5\}$　step 3　元の個数が$|V|-2|a_i|=3$より少いQの部分集合は$\{2\}\{4\}\{5\}\{2,4\}\{4,5\}\{2,5\}$。$\{2\}\cup a_i=\{1,2\}\in W$より$\{2,(\{1\},\{3,4,5\})\}=\{2,e_4,e_5\}\in S$
同様にして$\{4,e_1,e_4\},\{5,e_1,e_5\},\{2,4,e_4\}\{4,5,e_1\}\{2,5,e_5\}\in S$

$i=8$　step 5　$W=\{\{2,3\}\{4,5\}\{3,5\}\{3,4\}\{1,2,3\}\{1,2,4\}\{2,3,4\}\{1,2,5\}\{2,3,5\}\{1,4,5\}\{3,4,5\}\}$
$T=\{\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}\{5\}\{1,2\}\{1,4\}\{1,5\}\}$

$i=9$　step 2　$a_i=\{2,3\}$　$Q=\{1,5,4\}$　step 3　$|U|<|V|-2|a_9|=1$であるUはなし
step 4　$|U|=1$であるUは$\{1\},\{4\}\{5\}$。$\{1\}\cup\{2,3\}\in W$, $V-\{1,2,3\}=\{4,5\}\notin T$より
$\{1,e_3,e_7\}\in W$。$V-\{5,2,3\}=\{1,4\}\in T$, $V-\{4,2,3\}=\{1,5\}\in T$よりSに入らない。

$i=12$のstep 6でstop　$S=\{\{4,e_1,e_4\}\{5,e_1,e_5\}\{2,4,e_4\}\{4,5,e_1\}\{2,5,e_5\}\{1,e_2\}$
$\{3,e_1\},\{2,e_3,e_7\}\{5,e_2,e_7\}\{4,e_2,e_3\}\{2,5,e_7\}\{2,4,e_3\}\{4,5,e_2\}\{1,e_6,e_7\}$
$\{5,e_5,e_7\}\{3,e_5,e_6\}\{1,5,e_7\}\{5,3,e_5\}\{1,e_3,e_6\}\{3,e_4,e_6\}\{4,e_3,e_4\}$
$\{1,4,e_3\}\{3,4,e_4\}\{3,e_4,e_5\}\{4,e_2,e_4\}\{5,e_2,e_5\}\{2,e_6,e_7\}\{5,e_1,e_7\}\{2,e_3,e_5,e_6\}$
$\{4,e_1,e_3\}\{1,e_3,e_7\}\}$

5　あとがき　点のみによる極小カットセットはこの方法では求められない。

参考文献 1) 西村・岡村「ネットワークにおけるカットに関する一考察」土木学会関西支部年次学術講演会概要 IV-8, 昭47