都市施設の長期的な最適配置について

京都大学　正会員　藤田昌久

1. はじめに

大都市は今日までたえず成長してきたし，将来もまたそうであろう。しかし，過去の都市計画においてこの，都市はたえず成長する，という事実が十分考慮に入れられていたとは言いがたく，このことが大都市における今日の混乱をもたらした大きなひとつの要因であると思える。この観点に立ち，本研究は長期的視野にもとづいた都市施設の配置プロセスは，いわばなしくずし的に膨張してきたいままでの大都市の拡大過程とどのように異なったものであるかを数理的に分析しようとするものである。

2. 問題の定式化

ここでは以下のように単純化されたひとつの都市を想定する。この都市は全体として n 地区より成り，d_ℓ を第 ℓ 番目の地区の都心からの距離とし，次の順になっているとする。

$$d_1 < d_2 < \cdots < d_\ell < \cdots < d_n \qquad (1)$$

各地区は面積 S_ℓ を有し，$S_n = \infty$ とする。一方，単純のため都市は2種類の施設のみから成っていると仮定し，これらを $i=1,2$ で示す。たとえば $i=1$ はオフィスで $i=2$ は住宅と考えることができるであろう。計画期間 $0 \sim T$ の各時刻 t における各施設の必要量 $D_i(t)$ は外生的に与えられているものと仮定する。したがって，$x_{i\ell}(t)$ で時刻 t，地区 ℓ の施設 i の量を表わすと次の条件が満たされる必要がある。

$$\sum_{\ell=1}^{n} x_{i\ell}(t) = D_i(t) \quad , \; i = 1, 2. \qquad (2)$$

上式の両辺を微分して，この制約は次のように表わすこともできる。

$$\sum_{\ell=1}^{n} \dot{x}_{i\ell}(t) = \dot{D}_i(t) \quad , \; i = 1, 2 \qquad (3)$$

$x_{i\ell}(t)$ は地区 ℓ に施設 i を建設することにより増加し，$u_{i\ell}(t)$ を地区 ℓ，時刻 t における施設 i の建設量［個/時間］とすると，

$$\dot{x}_{i\ell}(t) = u_{i\ell}(t) \qquad (4)$$

$$u_{i\ell}(t) \geq 0 \qquad (5)$$

となる。次に，施設 i の1単位建設に要する敷地面積は定数とし，これを k_i［m^2/個］で示す。そうすると各地区では次の面積制約が満たされていなければならない。

$$\sum_{i=1}^{2} k_i x_{i\ell}(t) \leqq S_\ell \qquad (6)$$

一方，各配置プロセスの評価要因としては，建設された施設から得られる便益と，施設の建設に要する費用が考えられる。しかし地区間の建設費用の差はないと仮定するので，制約条件(2)より全体としての建設費用は定数となり評価要因からはずせる。次に，各施設の1単位から得られる単位時間当りの便益は，都心で最大であり都心からの距離に応じて比例的に減少するとする。ゆえに，各時刻において都市全体の施設から得られる便益の合計は次のようになる。

$$\sum_{\ell=1}^{n} \sum_{i=1}^{2} (B_i - r_i d_\ell) x_{i\ell}(t) = \sum_{i=1}^{2} B_i \sum_{\ell=1}^{n} x_{i\ell}(t) - \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{i=1}^{2} r_i d_\ell x_{i\ell}(t)$$

ここに B_i は都心における施設 i の1単位から得られる時間当り便益で，r_i はこの便益の距離に対する低減率である。ところで式(2)より上式右辺の第1項は定数となるので，結局目的関数として次の値を最小化する。

$$\int_0^T \rho(t) \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{i=1}^{2} x_{i\ell}(t)\, r_i d_\ell \, dt \qquad (7)$$

ここに $\rho(t) > 0$ で，$\rho(t=0) = 1$ と規準化すると，$1 - \rho(t)$ が時間 t における便益の初期時点に対する割引率をあらわす。　以上より，本研究における問題は次のように定式化される。

問題

計画期間全体における不便益の合計

$$\int_0^T \rho(t)\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{i=1}^{2} x_{i\ell}(t)\, r_i\, d_\ell\, dt$$

を以下の制約条件および初期条件のもとで最小にする建設速度 $u_{i\ell}(t)$ の値を求めよ。

a)施設量変化式

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_{i\ell}(t)=u_{i\ell}(t)\\ &u_{i\ell}(t)\ge 0\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&i=1,2\\ &\ell=1,2,\cdots,n\end{aligned}$$

b)施設量制約

$$\sum_{\ell=1}^{n} u_{i\ell}(t)=\dot{D}_i(t)\ ,\qquad i=1,2$$

c)面積制約

$$\sum_{i=1}^{2} k_i x_{i\ell}(t)\le S_\ell\ ,\qquad \ell=1,2,\cdots,n$$

d)初期条件

$$\left.\begin{aligned} &x_{i\ell}(t=0)=x_{i\ell}(0)\ge 0\\ &D_i(t=0)=D_i(0)=\sum_{\ell=1}^{n}x_{i\ell}(0)\\ &\sum_{i=1}^{2}k_i x_{i\ell}(0)\le S_\ell\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&i=1,2\\ &\ell=1,2,\cdots,n\end{aligned}$$

ただし、$\dot{D}_i(t)$ および $\rho(t)$ は t に関して連続であるとする。

3．最適配置プロセス

以上の問題に対する最適解は最大原理を適用することにより求められる。[1),2)] 簡単のためにここでは $n=2$，つまり都市が2地区より成っている場合の一般解を示すと以下のようになる。ただし以下において $\sigma(t)=\int_0^t \rho(\tau)d\tau$ である。また，$x_{i\ell}(0)=0$; $\frac{r_1}{k_1}>\frac{r_2}{k_2}$ とする。

a). $k_1D_1(T)+k_2D_2(T)\le S_1$ のときは，$i=1,2$ をすべて $\ell=1$ に建設する。

b). $k_1D_1(T)+k_2D_2(T)>S_1$ のとき，

イ) $k_1D_1(T)\ge S_1$ ならば，$k_1D_1(t)=S_1$ なる t を t_1^0 とおくと，

イ)-(i)：$\sigma(T)<\dfrac{\sigma(t_1^0)}{1-\frac{r_2}{k_2}/\frac{r_1}{k_1}}$ であれば，$i=1$, 2 はそれぞれスイッチ時刻 t_1^*, t_2^* まで $\ell=1$ に建設され，以後は $\ell=2$ に建設される。ここに t_i^* は次の連立方程式の解である。

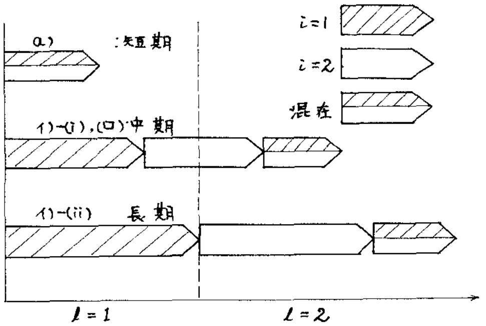
$$\left.\begin{aligned} &\frac{r_1}{k_1}\left(\sigma(T)-\sigma(t_1^*)\right)=\frac{r_2}{k_2}\left(\sigma(T)-\sigma(t_2^*)\right)\\ &k_1D_1(t_1^*)+k_2D_2(t_2^*)=S_1\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

イ)-(ii) $\sigma(T)\ge \dfrac{\sigma(t_1^0)}{1-\frac{r_2}{k_2}/\frac{r_1}{k_1}}$ であれば，$i=1$ は $\ell=1$ にいっぱいになるまで建設され，その後は $\ell=2$ に建設される。一方，$i=2$ は $\ell=2$ にのみすべて建設される。

ロ). $k_1D_1(T)<S_1$ ならば上のイ)-(i)と同じパターンになる。

これらの最適配置パターンを図示すると次のようになる。

図1．2地区の場合の最適配置プロセス



最適配置パターンのうちどれが起るかは問題で与えられたパラメータの値に依存するが，ここでは計画期間の長さTに注目すると次のことがわかる。つまり，短期の場合は両施設とも都心に近い所から順次建設され両施設の混在がおこる。しかし長期の場合は $i=2$ は $i=1$ の将来の増加をみこして都心から十分はなれた所から建設されはじめ，両施設間には長期にわたって空地が存在する。これより，長期の最適配置プロセスは短期計画のくり返しでは実現されないことがわかる。

4. おわりに

本稿では最適解の求め方や，より一般の場合について書くことができなかったが，これらについては講演時に発表する。

参考文献

1) M.R.Hestenes. "Calculus of Variation and Optimal Control Theory", John Wiley & Sons, 1966, pp 352－375

2). ポントリャーギンほか, 関根智明訳, "最適過程の数学的理論", 総合図書, 1967, pp.269－328.