有限要素法による地下ダムの効果の検討

京都大学工学部　正員　松尾新一郎
同　上　　　　　正員　○河野伊一郎

1. はしがき

浸透問題の解析に有限要素法（*Finite Element Method*）が多く用いられるようになったが[1]，その最大の特長は境界条件に制約されずに適用できるところにあると思われる。境界がすべて方形で区分しうる場合には差分法でさしつかえないが，現実の多くの問題では3角形の要素に区分して解析できる有限要素法の方がはるかに応用範囲，結果の精度という点で優れている。本文は，筆者らがこれまで研究してきた「地下ダムによる地下水規制」[2]にこの手法を用いて検討したものであり，調査例として京都府乙訓地区における地下ダムの効果の検討を行なっている。

2. 地下水問題の解法としての有限要素法

筆者らは，有限要素法による地下水流問題の解法に，従来のものと若干異った表示をしている（基本的な考え方はもちろん同じである）ので簡単に紹介する。

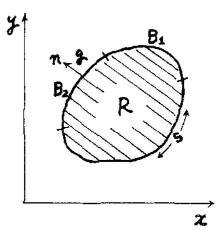

Fig.1 Domain and Boundary

周知のようにFig.1 の地下水領域（境界 $B = B_1 + B_2$）内においては

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h}{\partial y}\right) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$h = f \ : \text{given on } B_1 , \qquad T\frac{\partial h}{\partial n} = g \ : \text{given on } B_2 \quad \cdots\cdots (2)$$

したがって，汎関数は次式（3）のように表示される。

$$V = \frac{1}{2}\iint_R \left[T\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + T\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 \right] dx\,dy + \int_{B_2} hg\,ds \quad \cdots\cdots (3)$$

変分原理（Variational Principle）により，問題は式（3）の V が極値を有することに帰する。

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial h}\delta h = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

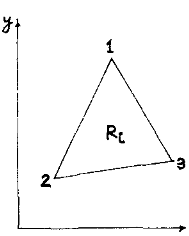

Fig.2 Element

さて，有限要素としてFig.2 のように3角形要素 R_i $(i = 1 \sim M)$ を用い，各要素の中では，変数である地下水位 h が直交座標系 (x, y) の一次の関係で変化しているものと仮定する。要素内では地下水面は平板となる。

$$h = a_1 x + a_2 y + a_3 \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

Fig.2 の節点（node）1，2，3 の水位 h_1，h_2，h_3 をそれぞれ式（4）に代入して，この連立方程式を解くと式（5）の係数がつぎのように求まる。

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= (b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3)/2\Delta \\ a_2 &= (c_1 h_1 + c_2 h_2 + c_3 h_3)/2\Delta \\ a_3 &= (d_1 h_1 + d_2 h_2 + d_3 h_3)/2\Delta \end{aligned}\right\} \cdots (6)$$

ここに，Δ は3角形要素の面積である。

$b_i = y_j - y_k$，　$c_i = x_k - x_j$，　$d_i = x_j y_k - x_k y_j$　（i, j, k は回転順列である）

各要素内では透水量係数Tは一定であると仮定し，式(5)，(6)を式(3)の才1項に代入してまとめるとつぎのように表示される。

$$\nabla_j=\frac{1}{2}\sum_{k}^{3}\sum_{\ell}^{3}P_{k\ell}h_k h_\ell\ ,\qquad P_{ij}=\frac{T_j}{2\Delta}(b_k b_\ell+c_k c_\ell)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

いま，Fig.1に示す境界が，地下水位が与えられるB₁−Typeと，B₂−Typeのうち $q=0$，すなわち不透水性境界である場合には式(3)の才2項はゼロとなる。したがって汎関数∇は式(7)を各要素について合計したものとなって，つぎのように表わされる。

$$\nabla=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}P_{k\ell}h_k h_\ell\ \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

ここに，nは節点(node)の数である。式(4)から，∇をh_j $(j=1\sim n)$について偏微分したものがゼロとなる。よって

$$\sum_{j=1}^{n}P_{ij}h_j=0\quad(i=1\sim n)\ \cdots(9)$$

式(9)はn元の連立方程式であり，これを解けばh_j $(j=1\sim n)$が求まる。

3．地下ダムの効果の検討例

Fig.3は，上記の有限要素法を用いて京都府乙訓地域に地下ダムを建設することによる地下水規制の効果について検討した一例を示している。A−Bが地下ダムの位置，B−C，D−E，F−G，H−Aは不透水性の境界，C−D，E−F，G−Hは地下水位が与えられるB₁−Typeの境界(地下ダム地点での地下水位変化の影響が及ばない地点)と仮定した。

同図には，地下ダムの地点A−Bで単位1の地下水位変化があったときの各地点での地下水位変化量を等水位変化量線で表示している。なお地下水位の変化前後でTは不変であると仮定して計算している。

一例として地下ダム地点で+5.0ᵐ地下水位が上昇すると，有効間げき率を0.4として，この地域一帯で約2,500万m³の地下水貯留が行われる。

4

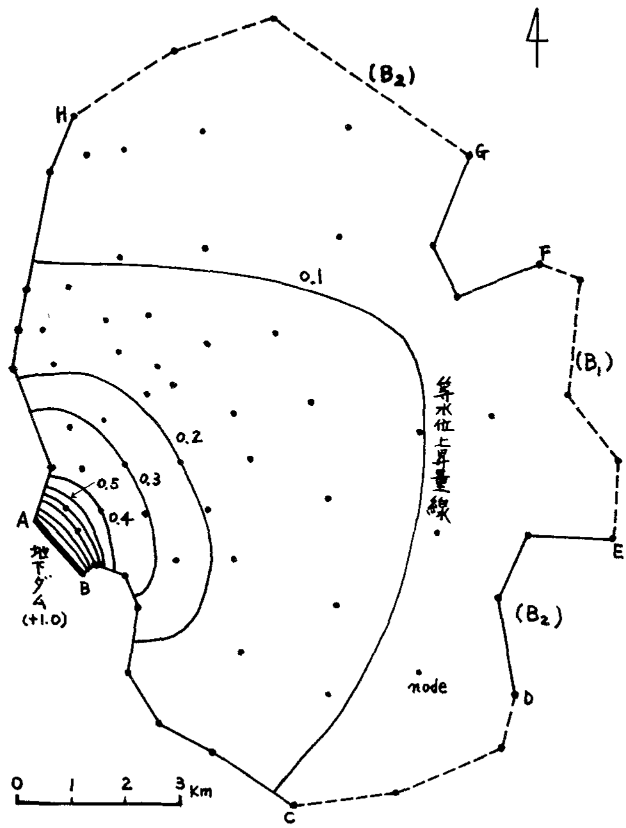

Fig.3 有限要素法による地下ダムの地下水位規制の効果の検討の一例(京都府乙訓地域)

〔参考文献〕 1)たとえば，Zienkiewicz らによる *The Finite Element Method*, McGraw-Hill (1967)
2)松尾，河野：地下水規制のための地下ダムの構想，土木学会誌 53−3 (1968)