積分方程式による浸透流の解析

○京都大学　正員　福井卓雄，山口大学　正員　中川浩二

浸透流問題を積分方程式に帰着させて解析する。　ここで用いる方法はポテンシャル論における Green の方法の一般的な境界値問題への拡張であり，近年，Kupradze などにより弾性学の種々の問題に適用されてきている。　この方法の特徴は任意の境界条件のもとで任意の形状のものを取り扱い得ることであり，また求めるべき未知関数を境界の上でのみ考えるので，領域内部全体を扱う有限要素法，差分法などと比較して計算時間が著しく短かくて済むことである。

浸透流問題：　領域 D およびその境界 ∂D において次のように定義する。（定常の場合）.

場の方程式

$$\mathbb{L}h(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right) = 0 \qquad x \in D \qquad (1)$$

ここに，　K_{ij}；透水係数　$K_{ij} = K_{ji}$，　h：ピエゾ水頭

$v_i = K_{ij}\dfrac{\partial h}{\partial x_j}$　；流速．　繰り返される添字については総和規約を適用する。

境界条件

$$h(s) = f(s) \qquad s \in \partial D_1 \quad (\text{第一種}) \qquad (2)$$

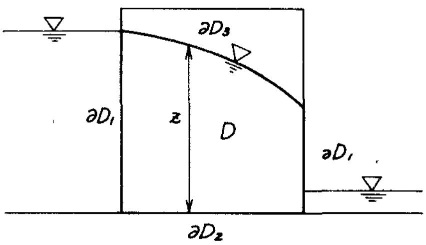
$$\mathbb{N}h(s) = q(s) \qquad s \in \partial D_2 \quad (\text{第二種}) \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} h(s) &= z(s) \\ \mathbb{N}h(s) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad s \in \partial D_3 \quad (\text{自由水面}) \qquad (4)$$

ここに，　$\mathbb{N}h(s) = n_i v_i = n_i K_{ij}\dfrac{\partial h}{\partial x_j}$，

n_i：点 s における単位法線ベクトル．　f, q；与えられた関数．

図 1.



Green の公式と基本特異解：　$K_{ij} = K_{ji}$ より $\mathbb{L}$ は自己随伴作用素である。　Laplace 作用素における Green の公式に対応して次の公式が成立する。　即ち，関数 u, v が領域 $(D+\partial D)$ で二階導関数まで連続な関数とすると，

$$\int_D (u\mathbb{L}v - v\mathbb{L}u)\,dV = \int_{\partial D}(u\mathbb{N}v - v\mathbb{N}u)\,dS \qquad (5)$$

基本特異解とは次の方程式を満足する解をいう．（以下，K_{ij} が考える領域で定数であるとする）。

$$\mathbb{L}^x G(x;y) = -\delta(x-y) \quad , \quad G(x;y) = G(y;x) \qquad (6)$$

また第二の基本特異解として，次のものを定義する。

$$G_i^n(x;y) = \tilde{G}_i^n(y;x) = \mathbb{N}^y G(y;x) \qquad (7)$$

ここに，作用素 $\mathbb{L}^x$，$\mathbb{N}^y$ の添字 x, y はそれぞれの作用素が作用する変数を表わす。
例えば，二次元異方性の場合の基本特異解は，異方性の軸と一致する座標系 (ξ_1, ξ_2)，それぞれの方向に対する透水係数 $(K, \kappa K)$ を与えてやれば，次のようになる。

$$G(\xi;0) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}K}\log\frac{1}{r}$$

$$G_i^n(\xi;0) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}}\frac{n_1\xi_1+n_2\xi_2}{r^2}$$

ここに、 $r^2 = \xi_1^2 + (1/\lambda)\xi_2^2$ ， n_i ；点 $(0,0)$ における単位法線ベクトル．

(5)式において，$u(x)$ のかわりに (1)式を満足する関数 $h(x)$，$v(x)$ のかわりに (6)式によって定義される基本特異解 $G(x;y)$ を代入し，(7)式を考慮して，

$$F(y)\,h(y) = \int_{\partial D}\left[G(x;y)\,N^x h(x) - G_i^n(x;y)\,h(x)\right] dS_x \qquad (8)$$

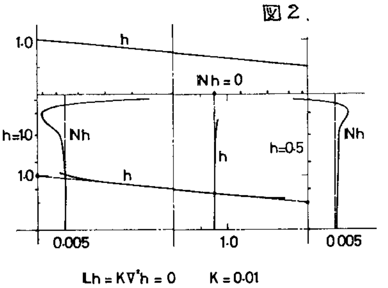
ここに，$F(y)$ は境界 ∂D が連続でなめらかなとき，$y \notin D+\partial D$，$y \in \partial D$，$y \in D$ に対してそれぞれ 0，$\frac{1}{2}$，1 の値を取る。

積分方程式の構成： (8)式において，変数 x と y を入れ換え，(6)，(7)式を考慮する。特に $x = x_0 \in \partial D$ の場合を考えれば，

$$\frac{1}{2}h(x_0) = \int_{\partial D}\left[G(x_0;y)\,N^y h(y) - G_i^n(x_0;y)\,h(y)\right] dS_y$$

この式は，境界上の $h(y)$ と $N^y h(y)$ に関する式であり，境界上でどちらかの関数が与えられているとき，他方の関数に関する積分方程式を構成する。

図2．



数値計算例： 等方等質の場合について，簡単な場合の計算例を挙げる。

(図2)， 一様流の場合で，正解は破線で入れておいた。この簡単な場合でも一種の混合境界値問題であるが $h(x)$ の値は特に境界上で正解に近い。境界上で境界条件を満足させた点は全部で44点で計算時間は約18秒であった。(FACOM 230-60)。

(図3) 自由水面を有する場合である。この場合には最初自由水面の形が未知であるので，初期条件として，図の二点鎖線のように水面を仮定しておき，境界条件 $(4)_2$ を満足するように解を求め，仮定した水面上の $h(x)$ の値から水面の形を漸次補正して，境界条件(4)を満足するまでこれを繰り返した。境界点は(図2)の場合と同じ程度に取って，18回の繰り返しを行った。計算時間は約55秒であった。(FACOM 230-60)。

図3．