

水平力と軸力と曲げモーメントを受ける単杭の水平抵抗について

立命館大学理工学部 正員 西本 安範

1. まえがき 杭の水平抵抗に関しては、従来より、軸力が作用している場合でも、軸力の影響を考慮していない理論式で設計計算がなされているようであるが、この軸力は大きく作用する場合にはその影響を考慮する必要があるものと考えられる。著者は、すでに、こうした軸力と水平力を受ける単杭の水平抵抗に関して、⁽¹⁾ 仮合地盤反力法と同様な考え方にもとづいて誘導した弾塑性理論式と^{(2), (3), (4), (5)} 2, 3の計算結果を報告しているが、今回は、さらに、杭頭部に曲げモーメントが作用する場合を対象とした弾塑性理論式を誘導し、軸力の影響をみるために数値計算をおこなった。

2. 理論式の誘導 図-1に示すごとく、地上に突出していない単杭が杭頭部に水平力 H 、軸力 N 、曲げモーメント M_0 を受ける場合、地盤反力の分布を図-2に示すごとく、塑性域、弾性域において $b\beta_1 x_1$ 、 $b k y_2$ として与え、軸力 N を杭周マサツカを無視して杭頭から杭先端まで一定であると考え、両域における杭の挙動に関する基礎方程式は、 EI ：杭の曲げ剛性、 b ：杭の作用幅、 β_1 ：降伏地盤反力係数、 k ：横方向地盤反力係数としてそれぞれ次式で示される。

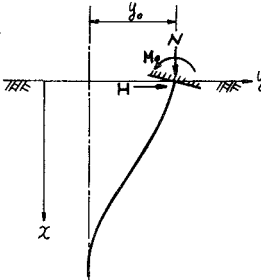


図-1 杭頭に水平力 H と軸力 N と曲げモーメント M_0 を受ける杭

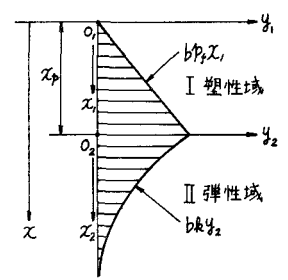


図-2 塑性域と弾性域における地盤反力

$$\text{塑性域}(0 \leq x < x_p): EI \frac{d^4 y_1}{dx^4} + N \frac{d^2 y_1}{dx^2} + b \beta_1 x_1 = 0 \quad (1), \quad \text{弾性域}(x \geq x_p): EI \frac{d^4 y_2}{dx^4} + N \frac{d^2 y_2}{dx^2} + b k y_2 = 0 \quad (2)$$

杭が無限長の場合を対象として式(1)、(2)の一般解を求めると次式の式(3)、(4)が得られる。

$$y_1 = C_1 + C_2 x_1 + C_3 \cosh A x_1 + C_4 \sinh A x_1 - \frac{b \beta_1}{6N} x_1^3 \quad (3), \quad y_2 = e^{-\alpha x_2} (C_5 \cosh \gamma x_2 + C_6 \sinh \gamma x_2) \quad (4)$$

式(3)、(4)において、 $A = \sqrt{N/EI}$ 、 $\alpha = \sqrt{\beta^2(N/4EI)}$ 、 $\gamma = \sqrt{\beta^2 + (N/4EI)}$ 、 $\beta = \sqrt[4]{bk/4EI}$ で、 $C_1 \sim C_6$ は積分定数である。ここで 杭頭($x=0$)における境界条件と塑性域と弾性域の境界($x_1=x_p$ 、 $x_2=0$)における接続条件を考えると次式が成立する。

$$\text{境界条件: } (y_1'') = -\frac{M_0}{EI}, (y_1'') + \frac{N}{EI} (y_1') = \frac{H}{EI} \quad (5), \quad \text{接続条件: } (y_1) = (y_2), (y_1') = (y_2'), (y_1'') = (y_2''), (y_1''') = (y_2''') \quad (6)$$

式(5)、(6)より積分定数 $C_1 \sim C_6$ を求めると次式の式(7)で示されるような結果となる。

$$\begin{aligned} C_1 &= Y_0 - \frac{1}{\Delta A} \left\{ \left[2\alpha A^2 \bar{x} + (4\beta^4 + (3\alpha^2 - r^2)A^2) \bar{z} \right] Y_0' + \left[A(3\alpha^2 - r^2 + A^2) \bar{x} + 4\alpha \beta^2 \bar{z} \right] Y_0'' + \left[2\alpha A \bar{x} + (2\beta^2 - A^2) \bar{z} \right] Y_0''' \right\} \\ C_2 &= \frac{H}{N} + \frac{b \beta_1}{A^2 N}, \quad C_3 = \frac{M_0}{N}, \quad C_4 = \frac{2\beta^2}{\Delta A} (2\beta^2 Y_0' + 2\alpha Y_0'' + Y_0''') \\ C_5 &= -\frac{1}{\Delta} \left\{ A \left[2\alpha A \bar{x} + (3\alpha^2 - r^2) \bar{z} \right] Y_0' + (3\alpha^2 - r^2 + A^2) \bar{x} Y_0'' + (2\alpha \bar{x} - A \bar{z}) Y_0''' \right\} \\ C_6 &= -\frac{1}{\Delta \gamma} \left\{ A \left[(\alpha^2 - r^2) A \bar{x} + \alpha (\alpha^2 - 3r^2) \bar{z} \right] Y_0' + \alpha (\alpha^2 - 3r^2 + A^2) \bar{x} Y_0'' + \left[(\alpha^2 - r^2) \bar{x} - \alpha A \bar{z} \right] Y_0''' \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)において

$$\Delta = 2\beta^2 \left\{ (2\beta^2 - A^2) \bar{X} - 2\alpha A \bar{Z} \right\} \quad (\Delta = 0: \text{座屈条件式}), \quad Y_0 = -\frac{M_0}{N} \bar{X} + \frac{b\beta}{6N} x_p^3 - \left(\frac{H}{N} + \frac{b\beta}{A^2 N} \right) x_p$$

$$Y'_0 = \frac{M_0}{N} A \bar{Z} + \frac{b\beta}{2N} x_p^2 - \left(\frac{H}{N} + \frac{b\beta}{A^2 N} \right), \quad Y''_0 = \frac{M_0}{N} A^2 \bar{X} + \frac{b\beta}{N} x_p, \quad Y'''_0 = -\frac{M_0}{N} A^2 \bar{Z} + \frac{b\beta}{N}, \quad \bar{X} = \cos Ax_p, \quad \bar{Z} = \sin Ax_p$$

また、地表面における杭の水平変位 y_0 は $y_0 = (y_1)_{x_1=0}$ の関係式より、塑性域の深さ x_p は、 $\beta x_p / k = (y_1)_{x_1=x_p}$ 、あるいは $\beta x_p / k = (y_2)_{x_2=0}$ の関係式よりそれぞれ次式で与えられる。

$$y_0 = C_1 + C_3 \quad (9), \quad \frac{\beta}{k} x_p - C_5 = 0 \quad (10)$$

3. 計算結果とその考察

計算で対象とした杭は、奥行幅が1cm、作用幅が2cm、弾性係数 E が $30,000 \text{ kg/cm}^2$ のさ模型杭であり、地盤定数としては弾塑性理論式については $\beta = 0.1 \text{ kg/cm}^2$ 、 $k = 10 \text{ kg/cm}^2$ の値を、弾性理論式については $k = 10 \text{ kg/cm}^2$ の値をそれぞれ採用した。

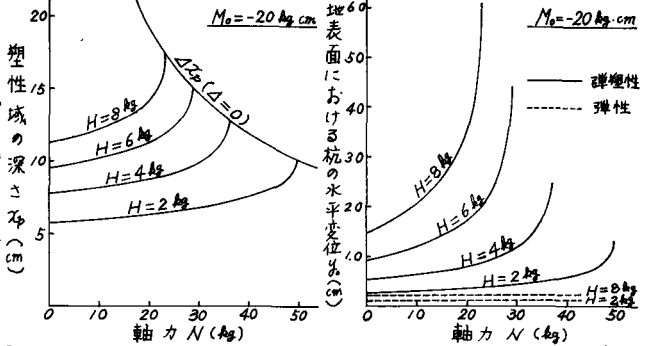


図-3 塑性域の深さ x_p と ΔZ_p の計算結果

図-4 地表面における杭の水平変位 y_0 の計算結果

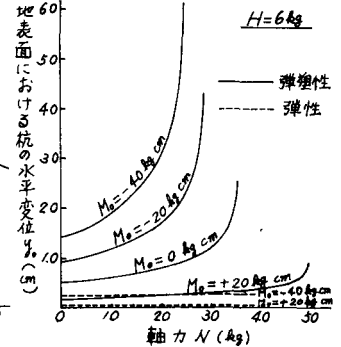
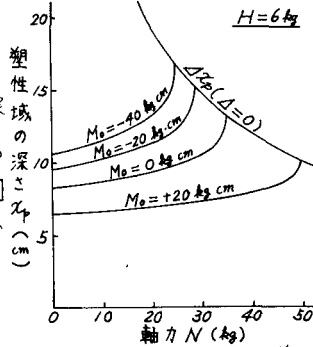


図-5 塑性域の深さ x_p と ΔZ_p の計算結果

図-6 地表面における杭の水平変位 y_0 の計算結果

図-3、図-4は、杭頭曲げモーメント $M_0 = -20 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ 、水平力 $H = 2, 4, 6, 8 \text{ kg}$ が作用した場合の塑性域の深さ x_p と地表面における杭の水平変位 y_0 の計算結果を図示したものである。図-3に示した x_p は軸力の増大にともなってその増加の割合が大きくなり、さらに軸力が増大して、式(8)の Δ を $\Delta = 0$ と置いた座屈条件式より求めた塑性域の深さ Δx_p の曲線に近づくにつれて、その増加が著しく大きくなる結果を与える。また、水平力の増大にともなって軸力の影響が大きくなるのが同図より認められる。図-4に示した y_0 は、図-3の x_p の計算結果と対応して、軸力の増大にともなってその増加の割合が大きくなり、軸力が座屈荷重に近づくにつれて無限大となる結果を与える。また、図-5、図-6は、水平力 $H = 6 \text{ kg}$ 、杭頭曲げモーメント $M_0 = -40, -20, 0, +20 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ が作用した場合の x_p と y_0 の計算結果を図示したものであるが、杭頭部の拘束条件によって軸力の影響がかなり異なるのが認められる。また、図-4、図-6に示した y_0 の弾塑性理論式の計算結果と弾性理論式の計算結果を比較すると、水平力と水平力と同方向に作用する杭頭曲げモーメントの増大にともなって、両理論式の計算結果の差が拡大するのが認められる。

参考文献 1) 鋼管研究委員会：鋼管，土木工学，pp. 63~66

2) 西本安範：軸力を受ける単杭の水平抵抗に関する研究，第26回土木学会年次学術講演会講演概要集，BB，46，10

3) 西本安範：軸力と水平力を受ける単杭の水平抵抗に関する研究，立命館大学理工学研究所紀要，第21号，BB，47，1

4) 西本安範：軸力を受ける単杭の水平抵抗について，第7回土木工学研究発表会講演集，BB，47，6

5) 西本安範：軸力を受ける単杭の水平抵抗に関する研究，第27回土木学会年次学術講演会講演概要集，BB，47，10

6) 勝見雅，西本安範：杭の水平抵抗に関する2,3の考察，立命館大学理工学研究所紀要，第17号，BB，43，12