

土の応力～ひずみ関係を用いたトンネルの変形解析

京都大学防災研究所 正員 ○橋本 正
同 上 正員 松岡 元

1. まえがき

土中に掘削されたトンネルの土圧および変形は、周辺地山の応力～ひずみ関係に依存するものである。しかし、土の応力～ひずみ関係は一般に複雑な形の式となるので、弾性解析などのように簡単に解くことは困難である。ここでは、トンネル円孔より無限遠方で等方圧が作用し、物体力が無視できる場合について、土の応力～ひずみ関係にもとずき円孔の変位とトンネル土圧との関係を検討した。

2 解析模型および解析法

図-1は、トンネル円孔より無限遠方で等方圧 P_0 が作用し、左右上下とも対称な平面ひずみ問題の場合を示した。円孔($r=a$)において半径方向の変位(u_a)が生じた場合を考えると、接線方向のひずみ $(\epsilon_\theta)_{r=a} = (\epsilon_1)_{r=a} = u_a/a$ に変位する場合には、 $(\epsilon_\theta)_{r=a} = (\epsilon_3)_{r=a} = -u_a/a$ となる。ただし、ひずみは圧縮を正とし、 a はトンネル円孔半径を示す。

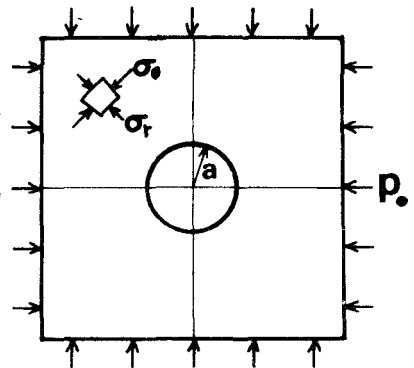


図-1 トンネル模型図

一方、土の応力～ひずみ関係は松岡により主応力比～主ひずみ関係として平面ひずみの場合には次式が与えられている。

$$\epsilon_1 = f(\sigma/\sigma_0) = \frac{\sqrt{2} \exp(-\frac{\mu' - \mu}{2})}{2} \cdot \exp\left\{\frac{X}{2(\mu' - \mu)}\right\} \cdot \left\{\frac{X^2}{8} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - \frac{\mu' - \mu}{2}\right)X + (\mu' - \mu)^2 - (\mu' - \mu) + \frac{2\mu'}{\lambda} + 1\right\} \quad (2)$$

$$\epsilon_3 = g(\sigma/\sigma_0) = \frac{\sqrt{2} \exp(-\frac{\mu' - \mu}{2})}{2} \cdot \exp\left\{\frac{X}{2(\mu' - \mu)}\right\} \cdot \left\{-\frac{X^2}{8} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu' - \mu}{2}\right)X - (\mu' - \mu)^2 - (\mu' - \mu) + \frac{2\mu'}{\lambda} - 1\right\} \quad (3)$$

ただし、 $X = \sqrt{\sigma_1/\sigma_3} - \sqrt{\sigma_3/\sigma_1}$ 、 λ 、 μ 、 μ' 、 σ_0 は土の種類および状態によって決まる係数であって、その予測は比較的容易であると考えられる。上式において、ひずみが応力比だけの関数として表わされていることより、トンネル円孔の変位量 u_a と主応力比 σ_r/σ_θ の関係が求まる。

1) 平均主応力 $\sigma_m (\equiv \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2})$ を一定とした場合： 応力のつり合い式は、図-1を参照にして、 $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0$ 、 $\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0$ (4)

円孔が内側に変位する場合は、 $\sigma_r = \sigma_3 = (1 - \sin \phi_{m0})\sigma_m$ 、 $\sigma_\theta = \sigma_1 = (1 + \sin \phi_{m0})\sigma_m$ (5)

ただし、 $\sin \phi_{m0} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}$ となり、これを(4)式に代入して解くと、 $\sin \phi_{m0} = A^2 r^{-2}$ (6)

を得る。ここで境界条件として、 $r=a$ において $\sigma_r = P_a$ 、および $\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) = P_0$ を用いて定数 A を消去すると σ_r 、 σ_θ は次式により表わされる。

$$\sigma_r = P_0 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{P_a}{P_0} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right\}, \quad \sigma_\theta = P_0 \left\{ 1 + \left(1 - \frac{P_a}{P_0} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right\} \quad (7)$$

円孔が外側に变位する場合についても同様に、 $\sigma_r = \sigma_1$ 、 $\sigma_\theta = \sigma_3$ として(7)式と同一式で表わされる。なお(7)式は弾性理論解と一致するが、このことは土中の応力分布については弾性解でも比較的良好に対応するといわれていることと関係するようで興味深い。

ロ). 主応力比が1だけの関数の場合: 応力のつり合い式(4)を満足する1つの解として次式を得た。

$$\sigma_r = p_0 \sqrt{1 - (1 - \frac{p_0}{\sigma_3})^2 (\frac{r}{a})^2}, \quad \sigma_\theta = p_0 \sqrt{1 - (1 - \frac{p_0}{\sigma_3})^2 (\frac{r}{a})^2} \quad (8)$$

円孔が内側へ変位する場合および外側へ変位する場合ともに(8)式により表わされる。

ハ). 有限要素法解析: 土を等方弾性体とすると、平面ひずみ状態では応力～ひずみ関係は

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [(1-\nu)\sigma_1 - \nu(1+\nu)\sigma_3], \quad \epsilon_3 = \frac{1}{E} [(1-\nu)\sigma_3 - \nu(1+\nu)\sigma_1]$$

となる。(4)式にこれを代入して ν , E を求めると

$$\nu = \frac{\frac{1}{2C} \{ -(C+D) + \sqrt{C^2 + 6CD + D^2} \}}{\frac{\sigma_3}{f(\frac{\sigma_3}{\sigma_3})} \cdot [(1-\nu)\frac{\sigma_3}{\sigma_3} - \nu(1+\nu)]} \quad (9)$$

$$E = \frac{\sigma_3}{f(\frac{\sigma_3}{\sigma_3})} \cdot [(1-\nu)\frac{\sigma_3}{\sigma_3} - \nu(1+\nu)]$$

ただし $C = f(\frac{\sigma_3}{\sigma_3}) \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_3} - g(\frac{\sigma_3}{\sigma_3})$, $D = f(\frac{\sigma_3}{\sigma_3}) - g(\frac{\sigma_3}{\sigma_3}) \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_3}$ となり、直接反復法により計算できる。

3. 計算例

地山材料として (2), (3)式の係数 $\lambda = 1.2$, $M = 0.25$, $M' = 0.44$, $\gamma_0 = 0.1\%$ なる土を用いた。円孔を内側に

$u_a = 0.0/a$ だけ変位させたときの応力分布、および応力比分布を図-2に示す。ただし 図-2, 3, 4における実線はハ)による値、点線はロ)の計算による値を示した。

図-3は円孔を内側に変位させた場合の変位量 u_a/a と土圧 p_a/p_0 との関係を示す。変位が大きくなるにしたがい、土圧は減少し一定値に落ちつく様子かわかる。図-4は円孔を外側に押し広げた場合の円孔変位と土圧の関係を示す。●印のプロットは Palmer 他²⁾が粘土について行った模型実験結果であるが、係数 γ_0 を1%とした場合(比較的 loose)と傾向がよく対応することがわかる。このようにして 円孔を内側にひか

めた場合、および外方へ押し広げた場合の土圧の傾向を、土の応力～ひずみ関係により推定できる。FEM

解析については、上記モデルに出来る限り類似した形で計算を行っているので 講演時に結果を示す。なお、図-1に示すモデルは 無限遠方 $r=\infty$ において外圧 $k_0\sigma_v(r=\frac{\sigma_v}{p_0})$ を受けるボーリング孔と同じ状態であるので、ボーリング孔を利用して内圧 p_a と円孔変位 u_a を測定することにより(アレスイオメーター, L.L.T. etc), 土の応力～ひずみ関係を(2), (3)式にもとずいて決定することが可能となる。最後に、本研究に対し(御指導を賜り、)た京都大学防災研究所 村山朝郎教授に深く感謝の意を表します。

り松田元 Mobilized 面に着目した土の応力～ひずみ関係 土木学会関西支部講演概要集 1973年

2) A.C. Palmer & R.J. Mitchell Plane-strain expansion of cylindrical cavity in Clay Proc Roscoe Meml Symp Cambridge 1971

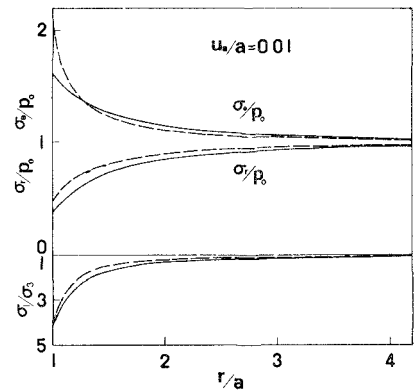


図-2 円孔周辺の応力分布

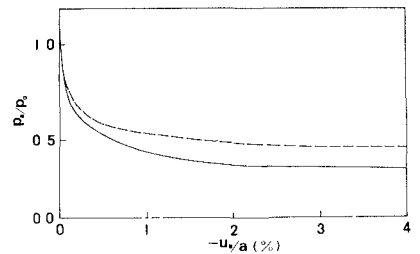


図-3 円孔が内側へ変位した場合の変位～土圧関係

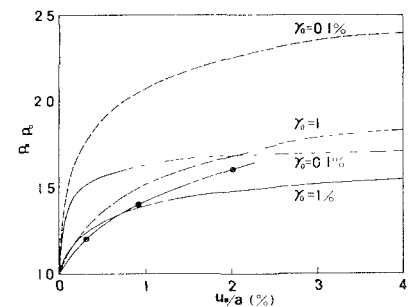


図-4 円孔が外側へ変位した場合の変位～土圧関係