せつ動解による有限振幅波理論について

京都大学防災研究所　正会員　土屋義人
〃　　〃　　山口正隆
京都大学大学院　学生会員 ○安田孝志

1．　緒　言　　波形が変化せずに伝播する波の理論は、G. G. Stokes (1847) の有限振幅ポテンシャル波の誘導に始まり、数多く発表されている。それは定常化された場における楕円型の偏微分方程式 $\nabla^2\phi=0$ を自由表面での境界条件に対して解く境界値問題であり、一般にせつ動解の近似の精度を向上させることに主力が注がれてきたようである。せつ動解の存在証明は Struik (1926)，Littman (1957) らによって，すでに示されたが、田中と Skjelbreia，Laitone と Chappelear とではそれぞれ解が異なるといった，せつ動法自体の問題もあって、従来から指摘されてきた有限振幅波理論における問題点、たとえば定常化に対する疑義，水面形に対して速度ポテンシャル ϕ が一意的に決まらないなど は明らかにされているとは言えない。ここでは、波速の定義として与えられる付加条件が異なることによって生じるせつ動解における相違点を示し、このことが現在の波動理論の欠陥とも考えられ、またその解決には、付加条件の選択ではなく、波動理論の再検討も必要であろうことを述べる。

2．　せつ動法に関する考察　　次式であらわされる波動の基礎式の無次元化によって生じる微小係数をせつ動パラメーターとするせつ動法によって、ϕ，ζ および c が求められるが、定常化することによって境界値問題として解かれる。

$$\left.\begin{array}{ll}\nabla^2\phi=0\,; & \text{境界条件}\,;\ \phi_t+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+g\zeta\big|_{z=\zeta}=Q,\ \ \zeta_t+\phi_x\zeta_x-\phi_z\big|_{z=\zeta}=0, \\ \phi_z\big|_{z=-h}=0 & \end{array}\right\}\tag{1}$$

ここに　ϕ：速度ポテンシャル，ζ：水位変動，Q：任意定数，h：平均水深　である。(1)式に対する一般解として周期運動成分と一様流成分とを仮定すれば、Rayleigh の定常化法の場合には、波速を決定するために Stokes によって定義された波速に関する次式の2つの付加条件のいずれかが必要となる。田中は波による質量輸送が存在する場を定常化するこ

$$\frac{1}{L}\int_0^L(\phi_x-c)\,dx=-c\tag{2}$$

$$\frac{1}{Lh}\int_0^L\int_{-h}^{\zeta}(\phi_x-c)\,dz\,dx=-c\tag{3}$$

とに対して疑義を示したが，(5)式は波形の進行速度が水粒子速度と独立であることを示し、(6)式は波速と重心の速度が一致することを示すものであるから、このように2つの波速が定義されるとすれば、田中の疑義はこの波速の定義の混同によるものと思われる。田中は(1)式における $z=\zeta$ での2つの境界条件式を合成して次式(4)式を得たが，ここでの ϕ は

$$\phi_{tt}+2\phi_x\phi_{tx}+\phi_z\phi_{tz}+(\phi_x)^2\phi_{xx}+\phi_x\phi_z\phi_{xz}+g\phi_z\big|_{z=\zeta}=0\tag{4}$$

$z=\zeta(x,t)$ を陰関数として含むため、$\Phi_x=\phi_x+\zeta_x\phi_z$，$\Phi_t=\phi_t+\zeta_t\phi_z$ であり，この点を考慮して(4)式を書き換えると、(5)式となり，田中の求めたせつ動解が異なっている原因がこ

$$\phi_{tt}+2\phi_x\phi_{tx}+2\phi_z\phi_{tz}+2\phi_x\phi_z\phi_{xz}+(\phi_x)^2\phi_{xx}+(\phi_z)^2\phi_{zz}+g\phi_z\big|_{z=\zeta}=0\tag{5}$$

こにあると思われる。一方，$\phi(x,z,t)=\phi(x-ct,z)$，$\zeta(x,t)=\zeta(x-ct)$と仮定し，$X=x-ct$の変数変換を行なうと，(2)および(3)式はそれぞれ$\int_0^L \Phi_x dx=0$，$\int_0^L\int_{-h}^{\zeta}\Phi_x dz\,dx=0$となる。以上のことから，波動の伝播現象を楕円型の方程式によって解くことに根本的問題があり，双曲型の方程式として解く波動理論が要求される。

つぎに，波の質量輸送を考慮して，波速第2定義を用いたせつ動解を示す。まず速度ポテンシャル，水位変動および波速を次式であらわす。

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= \varepsilon\phi_1+\varepsilon^2\phi_2+\varepsilon^3\phi_3+O(\varepsilon^4)\\ \zeta &= \varepsilon\zeta_1+\varepsilon^2\zeta_2+\varepsilon^3\zeta_3+O(\varepsilon^4)\\ C &= C_0+\varepsilon C_1+\varepsilon^2C_2+O(\varepsilon^3)\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

(6)式を(1)式に代入して，Φを求めれば，次式が得られる。

$$\Phi=\varepsilon C_0A_1\frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh}\sin kX+\varepsilon^2\frac{3C_0kA_1^2\cosh 2k(h+z)}{8\sinh^4 kh}\sin 2kX-\varepsilon^2\frac{kC_0A_1^2}{2h}\coth kh\cdot X$$
$$+\varepsilon^3\frac{3C_0k^2A_1^3}{64\sinh^7 kh}(11-2\cosh 2kh)\cosh 3k(h+z)\sin 3kX \qquad (7)$$

また，水位変動および波速はそれぞれ次式であらわされる。

$$\zeta=\varepsilon A_1\cos kX+\varepsilon^2\frac{kA_1^2\cosh kh}{4\sinh^3 kh}(\cosh 2kh+2)\cos 2kX+\varepsilon^3\frac{k^2A_1^3}{16\sinh^4 kh}(14\cosh^4 kh-14\cosh^2 kh-3)\cos kX$$
$$+\varepsilon^3\frac{3k^2A_1^3}{64\sinh^6 kh}(8\cosh^6 kh+1)\cos 3kX+\varepsilon^3\frac{k^2C_0A_1^3}{2gh}\coth^2 kh\cos 3kX \qquad (8)$$

$$C=\left(\frac{g}{k}\tanh kh\right)^{1/2}+\varepsilon^2\frac{C_0k^2A_1^2}{16\sinh^4 kh}(\cosh 4kh+8)-\varepsilon^2\frac{kC_0A_1^2}{2h}\coth kh \qquad (9)$$

一方，質量輸送速度Uは(7)および(8)式を用いて計算され，次式のようになる。

$$U=\varepsilon^2\frac{1}{2}C_0k^2A_1^2\frac{\cosh 2k(h+z)}{\sinh^2 kh}-\varepsilon^2\frac{1}{2h}kC_0A_1^2\coth kh \qquad (10)$$

ここにkは波数であり，〰〰線部は第1定義を用いたせつ動解との相違を示す。

3. 第2定義を用いたクノイド波理論

$$c/\sqrt{gh}=1+\{L_3+L_0(1-E/K)\}+[5L_0L_3(1-E/K)+L_0^2K^2(1-E/K)+2L_0^2(1-\tfrac{3}{2}E/K)+L_0^2(E/K)^2]$$

$$u/\sqrt{gh}=1+(H/h)\{\tfrac{1}{2K^2}(K^2-E/K)-cn^2\}+(H/h)^2[\tfrac{1}{20K^4}\{2-2K^2-3K^4+5E/K(1+K^2/2-\tfrac{1}{2}E/K)\}$$
$$+(5K^2-2E/K)cn^2/4K^2-\tfrac{5}{4}cn^4+3\{(1-K^2)/4K^2+(1-2K^2)/2K^2\cdot cn^2-\tfrac{3}{4}cn^4\}\{2z/h+(z/h)^2\}]$$

$$w/\sqrt{gh}=-[\tfrac{3}{K^2}(H/h)^3]^{1/2}cn\cdot dn\cdot sn(1+z/h)[1+(H/h)\tfrac{1}{8K^2}\{3K^2-10+8E/K-4K^2cn^2$$
$$+4(2z/h+z^2/h^2)(1-2K^2+3K^2cn^2)\}]$$

$$\zeta/h=(H/h)\{cn^2-\tfrac{1}{K^2}(K^2-1+E/K)\}+\tfrac{1}{20K^4}(H/h)^2\{-10+10K^2+10E/K-5K^2(E/K)-15K^4cn^2+15K^4cn^4\}$$

$$L_0=\tfrac{1}{K^2}(H/h)+\tfrac{1}{4K^4}(10-5K^2-12E/K)(H/h)^2+O(H/h)^3$$

$$L_3=-\tfrac{1}{2K^2}(K^2+E/K)(H/h)+\tfrac{1}{40K^4}\{44K^4-74K^2+4+5E/K(31K^2-18+23E/K)\}(H/h)^2+O(H/h)^3$$

ここに　cn, dn, sn：ヤコビの楕円関数，K：第1種完全楕円積分，およびE：第2種完全楕円積分　である。クノイド波理論においては，波速の定義の相違によって波速cのみが異なり，水平速度u，鉛直速度w，水位変動ζは一致する。つぎに，第1定義による波速cを次式で示す。

$$c/\sqrt{gh}=1+\{L_3+L_0(1-E/K)\}+[5L_0L_3(1-E/K)+\tfrac{5}{3}L_0^2+\tfrac{4}{3}L_0^2K^2-\tfrac{5}{3}L_0^2(1+K^2)E/K]$$

4. 結語

以上有限振幅波理論における二，三の根本的な問題点に関して考察を行なうとともに，波速に関する2つの付加条件を用いた波動論の比較を行ない，ただ，Boussinesq 流の波動論の高次項の展開を試みていくつもりである。