砂れきの移動確率に関する考察

京都大学工学部　正員　鈴木幸一
京都大学大学院　学生員　○辻本哲郎

土砂を含んだ水理現象は流れと砂粒の運動の複雑な相互作用であるが、水流とそれによる砂粒の運動量とを縮約し、砂粒の変位のみに注目すると簡単な確率過程となり、Einstein (1937)[1] 以来図-1に示すように多くの確率的取り扱いがなされてきた。砂粒の動きはEinsteinによって始められたように時間と距離，ジグザグモデルで

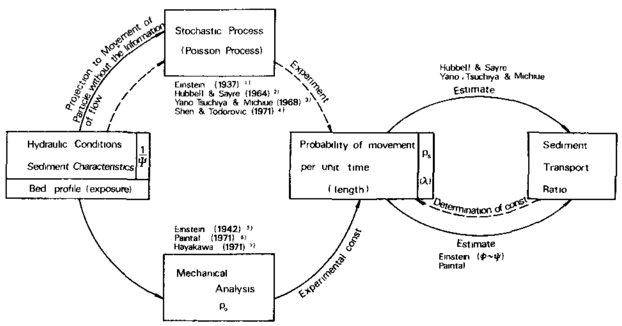

図-1，砂粒の移動を取り扱った研究

表現でき、それぞれに単位時間(長さ)あたりの移動確率 p_s (λ)を確率定数にとって個々独立に扱い得る。土砂を伴う水理現象は様々であり単に平衡状態のみの流砂量を得る流砂法則だけでは不充分であることを顧ると、このように時間のフェイズ，空間のフェイズに分けて考えることは有益であるといえる。また、土砂輸送に流れの乱れ，河床面の凹凸が大きな要素である以上これらのランダムネスを考えるという意味でもstochasticな手法を取らざるを得なく単に平均的状態での力学関係を云々するdeterministicな手法では不充分である。以上の意味で砂粒の移動に対しstochasticなアプローチを行なうのはきわめて当然で望ましいものであると考える。ところが、このような取り扱いは個々の砂粒のすべての運動を力学法則で解明するには情報が不足していたり、また不明確な情報をあえて縮約した結果であるので　更なる現象解明のためにはこの確率モデルと、力学機構との間に何らかの関連を見出すことが必要であろう。本研究ではこれらを踏まえ、時間的に均質な場で確率モデルにおける p_s (sec^{-1}) と、力学的アプローチによる p_o (無次元) との関連を考察する。

1. 確率過程としての砂粒の移動モデル　　ここでは砂粒の運動を確率過程として扱った研究の主流であるHomogeneous Poisson Processとしての扱いを採用した。すると距離x、時間t)の間にn回のステップをとる確率 $p(n;x)$, $p(n;t)$ はそれぞれ、

$$p(n;x) = e^{-\lambda x}(\lambda x)^n/n! \tag{1}$$

$$p(n;t) = e^{-p_s t}(p_s t)^n/n! \tag{2}$$

であり　砂粒が時刻tにxの位置にいる確率密度は、

$$f_t(x) = \lambda e^{-(\lambda x+p_s t)}\left(\frac{p_s t}{\lambda x}\right)^{1/2} I_1(2\sqrt{\lambda x p_s t}) \tag{3}$$

である。(ただし I_1 は1次の変形Bésse l関数である。)　この1次，2次のモーメントをとると，λ，p_s は容易に実験によって決めることができ，矢野・土屋・道上[3]らが有益な結果

を得ている。著者らも着色砂をトレーサーとして写真撮影によって原点残留確率 $p(0;t)$ を測定し p_s を得た。時間的な homogeneity に比べ空間的なこれは Bed Profile に関係するため曖昧であり (1) 式には幾分疑問があり (2) 式のみに基づいて実験を行なった。

2. 力学モデルによる移動確率との関連　砂の移動の絶対確率 p_0 は砂の挙動の試行時間を無視した絶対量で図-1 の左の隅に集めた情報から力学的に得られる。しかしこれらの量もランダムで確率的に取り扱われるべきものである。この p_0 は、砂粒の移動できる状態の確率と言ったほうがよく、Einstein は揚力が水中重量を越す確率とした[5]がこれでは不充分でここでは河床の凸凹を uniform に分布した露出度の概念を用い、河床面剪断応力を正規分布として扱い力学的に合理的な Paintal[6] の理論を採用した。この p_0 と p_s を結びつける特性時間 ($t_0 = p_0/p_s$) は移動できる状態の定義にもよるきわめて不明瞭な量で物理的考察から二,三の提案がなされているが著者らはあえて Einstein の提起したように流れ特性によらぬ流体中粒子の挙動を表わす量として沈降速度に関する時間を採用した。すなわち

$$t_0 = p_0/p_s = \frac{C}{F}\sqrt{d/(\sigma/\rho-1)g} \qquad (4)$$

である。ここに F は沈降速度を決めるパラメータで C は時間的に均質ならば一定となる。なお C はアプローチの相違によって生じた不明瞭なもので、(4) 式が次元解析的な仮定式である以上実験的に求める他ない。

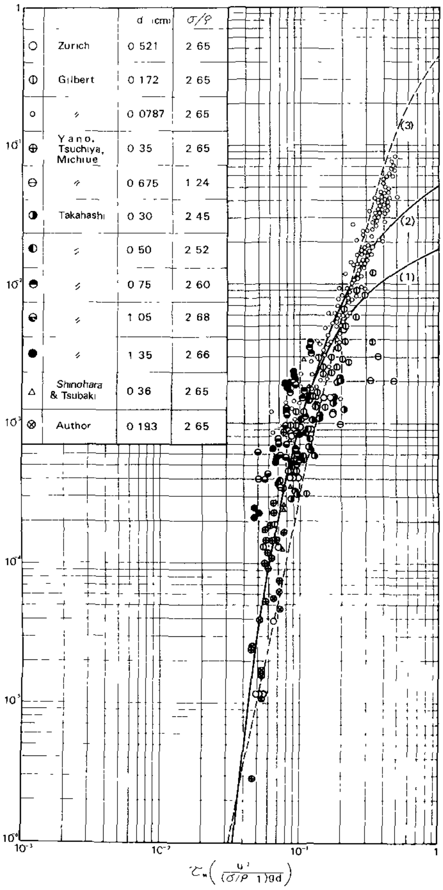

図-2. $\tau_* \sim p_s\sqrt{d/(\sigma/\rho-1)g}$

3. 砂の流送実験の結果と考察　$p(0;t)$ に関する実験結果を同様な実験による実験データ[3),8),9)]から整理し直したもの, 又 Einstein[5] の Zürich, Gilbert のデータを計算し直したものとともにプロットしたのが図-2 である。図中曲線 (1) (2) は Einstein の掃流砂関数[5]の換算, 破線は (4) 式で C/F を実験値に合うように決めた Paintal の理論である。これより τ_* の小さくの領域で,

$$p_s = 4.0 \times \sqrt{(\sigma/\rho-1)g/d} \cdot p_0 \qquad (p_0 \text{ は Paintal による理論的な絶対確率})$$

が受け容れられ、理論的に確率定数 p_s が推定され得る。

4. あとがき　土砂を含む水理現象の機構を解明することを背景に砂粒の移動を、諸要素の複雑な絡み合いを捨て確率過程として扱い, 力学的な裏づけを考察した。今後は更にこういった stochastic な扱いと力学的アプローチの関連を追求すること, また距離の場での力学的考察, 時間の場との総合が必要で, より一般的な流砂法則の確立を目指している。

〈参考文献〉 1)Einstein;1937,Verlag Rascher, Zurich, 2)Hubbell & Sayre;1964,Proc.ASCE,Vol.90, 3)矢野・土屋・道上;1968,京大防災研年報第11号, 4)Shen & Todorovic;1971.STOCHASTIC HYDRAULICS, 5)Einstein; 1942,Trans.ASCE,Vol.107, 6)Paintal;1971,Jour.Hyd.Research,IAHR,Vol.9, 7)Hayakawa,STOCHASTIC HYDRAULICS, 8)高橋;1966,新砂防60, 9)篠原・椿;1957,九大応力研所報第10号