

河床波のスペクトルに関する一考察

神戸大学工学部 正 員 松梨順三郎

神戸大学大学院 学生員 〇川口 恵司

1. まえがき

水流と河床砂の相互の作用によってその境界面に発生する波動的かく乱、すなわち河床波の形態および伝播機構は水流の条件、砂粒²⁾の特性に応じて種々の様相を呈する。このような移動床における現象は、流砂を伴う諸問題と密接な関連をもち、その特性を明確にすることは工学的にきわめて重要な課題となっている。そこで、本研究ではこういった問題の基礎的研究として、特に定常状態における *Dunes* の領域における河床変動に着目し、その波高および波長の分布特性を検討した結果、海洋における波浪の波高および波長の分布特性と類似していること、すなわち、近似的に *Rayleigh* 分布に従っていることを確認した。そこで、この分布特性と波高および波長の線形相関とを仮定し、それに *Tukey* の手法によって得たスペクトル(波数および周波数)からの波長と周期の関係を考慮することによって、*Bretschneider* が海洋の波浪に関して展開したスペクトル解析法³⁾に基づき、これを移動床における *Dunes* に適用して、その理論的な考察を試みたものである。

2. *Dunes* の波長と周期の関係

Fig. 1 は *Dunes* の領域における河床波のパワースペクトルの一例である。実線で示したものは波数スペクトル、破線で示したものは周波数スペクトルである。図に示した資料の実験条件は(流量 85 l/sec., 迂配 1/500, 水深 7.8 cm, 水路幅 50 cm, 中央粒径 0.15 mm, *Fr* 数 0.24)である。この場合のスペクトルの自由度は約 10 であるので、有意性に関する *Tukey* の検計²⁾から、各ピークが 95% の信頼度で有意であるためには、スペクトルの山と谷の比が約 3.0 以上なければならない。今、Fig. 1 における波数スペクトル、周波数スペクトルから卓越波長 25 cm, 卓越周期 40 分という値が読み取れる。そこで、波長と周期の比: λ/T が一種の河床波の伝播速度: U_b を与えるものとみると、 $U_b \approx 0.6$ cm/min. となる。一方、実測値は $U_b \approx 0.43$ cm/min. であった。したがって、両者はだいたい一致しているのでこの卓越波長と周期は互に対応していると考えられる。それ以外のピークはスペクトルに現われているものの中で有意なものを取り、これらが相対応しているものとして L, T を両対数紙上にプロットしたものが Fig. 2 である。プロット点は図にも見られるように一つの線上にのっている。そこで、この場合の L と T の関係を表わす実験式として次式を得た。

$$L \approx \text{Const. } T^{0.75} \quad (1)$$

以上は実験系列 ($Fr \approx 0.2 \sim 0.3$, $Re \approx 1.3 \times 10^4 \sim 2.8 \times 10^4$ の範囲にある)

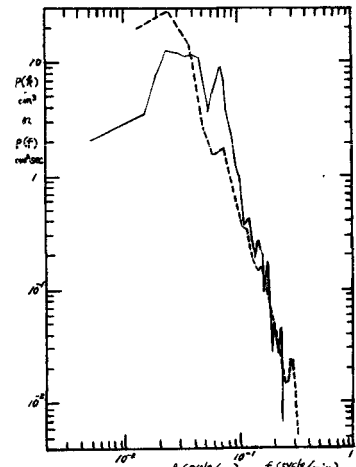


Fig. 1 パワースペクトル

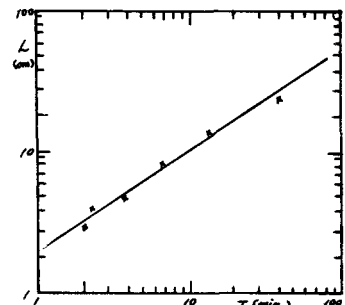


Fig. 2 L と T の関係

の中の一部の場合について考察したわけであり、(1)式は universal な関係式ではないので今後なお検討を要する。しかし、この式は海洋における深海波の関係 $L \propto T^2$ に対応したものであり、ある限られた水理条件における関係式ではあるが、ここでは以下の理論においてこれを考慮することにした。

3. 波高、波長の分布特性と周期の分布に関する理論的考察

河床波は一般的に不規則であって、波高 H および波長 L を定義することは容易ではないが、Fig. 3 に示すように、波高は上流側の山とすぐ下流側の谷との高低差と定義し、波長は河床高の測点を連ねる線が平均値を横ぎる点の間隔と定義する。今、波高、波長の平均値を各々 $\bar{H}$ 、 $\bar{L}$ とする。また周期についても、今仮りに $\bar{T}$ と仮定することにし、これらの平均値に対する各々の量の比をとり次のようにおく。

$$\eta = \frac{H}{\bar{H}}, \quad \lambda = \frac{L}{\bar{L}}, \quad \tau = \frac{T}{\bar{T}} \quad (2)$$

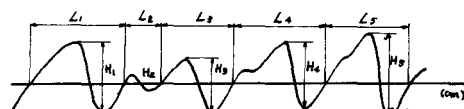


Fig. 3 波高、波長の取り方 (Zero-Up Crossing Method)

(2)式のように無次元化すると、次の諸関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta} = \bar{\lambda} = \bar{\tau} = 1.0, \quad \bar{\eta} \geq 1.0, \quad \bar{\lambda} \geq 1.0, \quad \bar{\tau} \geq 1.0 \\ d\eta = dH/\bar{H}, \quad d\lambda = dL/\bar{L}, \quad d\tau = dT/\bar{T} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

そこで本研究では、 η および λ の分布が近似的に Rayleigh 分布すると予測をつけた上で、その分布の特性を示す 2, 3 の統計パラメータと累加分布について理論とデータを比較した結果、両者の一致は良好であった。したがって、 η と λ の分布は Rayleigh 分布すると判断された。なお、1 実験から得られた資料数は平均的に 30 個であり、18 Case の実験を行った。Fig. 4 は Fig. 1 で示した実験と同じものから得られた波高、波長の累加分布の一例を示したものであり、実線は Rayleigh 分布の理論累加分布を示す。

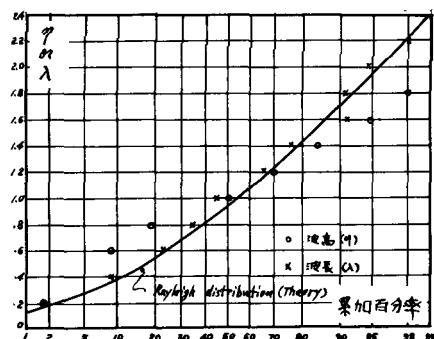


Fig. 4 η と λ の累加分布の一例

今、波高 η について考える。Rayleigh 分布の確率密度関数は次式で表わされる。

$$P(\eta) = K\eta \exp(-B\eta^2), \quad \eta = H/\bar{H} \quad (4)$$

ここで、平均ゼロについての η 次モーメント

$$M_n = \int_0^\infty \eta^n P(\eta) d\eta = \frac{K}{2B} \cdot \left(\frac{1}{B}\right)^{n/2} \cdot \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right), \quad \Gamma: \text{ガンマ関数} \quad (5)$$

を考える。したがって、 $M_0 = 1$, $M_1 = \bar{\eta} = 1$ より $K = \pi/2$, $B = \pi/4$ となり、また $M_2 = \bar{\eta}^2 = 4/\pi$, $M_3 = \bar{\eta}^3 = 6/\pi$, $M_4 = \bar{\eta}^4 = 2(4/\pi)^2$ となる。したがって K, B は決定されたので、 η の確率密度関数は

$$P(\eta) = \frac{\pi}{2} \eta \exp(-\pi\eta^2/4) \quad (6)$$

となり、同様に、波長 λ の確率密度関数は次式となる。

$$P(\lambda) = \frac{\pi}{2} \lambda \cdot \exp(-\pi\lambda^2/4) \quad (7)$$

次に周期の分布について考察する。式(1)を無次元化して次式のようにおく。

$$\lambda = a \tau^2 \quad (8)$$

a は以下の解析で決定される定数である。ここで、 $P(\tau)d\tau = P(\lambda)d\lambda$ の関係により、周期での

確率密度関数として次式をうる。

$$P(\tau) = \frac{\pi a^2 \tau^{1/2}}{3} \cdot \exp\left(-\frac{\pi a^2 \tau^{3/2}}{4}\right) \quad (9)$$

定数 a は、(5)式と同様にモーメントを評価することによって、 $a = 1.067$ となる。したがって(9)式は次式のように決まる。

$$P(\tau) = 1.2 \tau^{1/2} \cdot \exp(-0.89 \tau^{3/2}) \quad (10)$$

4. 波高と波長の Joint Distribution から誘導されるスペクトルについて

河床波の無次元波高 η および波長 λ の分布がデータ解析から確かめられたので、Bretschneiderの波浪のスペクトル解析と同様の手法を河床波に適用する。ここまでは η と λ を別々に考えてきたが、次に η と λ の joint distribution を考える。その際、 η と λ の間に linear な相関を仮定する。その相関係数を $r(\eta, \lambda)$ とする。Fig. 5 に示す η と λ の関係を Plot した scatter diagram において、ある η について、 $\eta - \frac{\Delta\eta}{2}$ と $\eta + \frac{\Delta\eta}{2}$ の間にある λ の値を合計し、 $\Delta\eta \rightarrow 0$ の場合の総和を $S_\lambda(\eta)$ とする。この $S_\lambda(\eta)$ は summation function と呼ばれ、数学的には次式となる。

$$S_\lambda(\eta) = \int_0^\infty \lambda \cdot P(\eta, \lambda) d\lambda \quad (11)$$

ここで、 $P(\eta, \lambda)$ は η と λ の結合密度関数であり、 $P(\eta, \lambda) = P(\eta) \cdot P_\eta(\lambda)$ とおきかえれば

$$S_\lambda(\eta) = P(\eta) \int_0^\infty \lambda P_\eta(\lambda) d\lambda = P(\eta) \cdot \bar{\lambda}_\eta \quad (12)$$

となる。ここで $\bar{\lambda}_\eta$ は η が現われた時の λ の平均値を表す。同様のことは η と λ を入れかえてもいえるので

$$S_\lambda(\eta) = P(\lambda) \int_0^\infty \eta \cdot P_\lambda(\eta) d\eta = P(\lambda) \cdot \bar{\eta}_\lambda \quad (13)$$

$\bar{\lambda}_\eta$ および $\bar{\eta}_\lambda$ は、 η と λ の線形回帰性と $\bar{\eta}^2 = \bar{\lambda}^2$ を仮定すれば、次式のように表わせる。

$$\bar{\lambda}_\eta = 1 + r(\eta - 1), \quad \bar{\eta}_\lambda = 1 + r(\lambda - 1) \quad (14)$$

(12), (13), (14)式および $P(\eta)$, $P(\lambda)$ に Rayleigh 分布の密度関数を適用すれば、 $S_\lambda(\eta)$ および $S_\eta(\lambda)$ は

$$S_\lambda(\eta) = \frac{\pi}{2} [1 + r(\eta - 1)] \eta \cdot \exp\left(-\frac{\pi \eta^2}{2}\right), \quad S_\eta(\lambda) = \frac{\pi}{2} [1 + r(\lambda - 1)] \lambda \exp\left(-\frac{\pi \lambda^2}{2}\right) \quad (15)$$

となる。(15)式の $S_\eta(\lambda)$ を用いると、波形勾配の平均値： $\overline{\left(\frac{\eta}{\lambda}\right)}$ を求めることができる。

$$\overline{\left(\frac{\eta}{\lambda}\right)} = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} S_\eta(\lambda) d\lambda = \frac{\pi}{2} \left[1 - r \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\right] \quad (16)$$

(15)式の $S_\lambda(\eta)$ および $S_\eta(\lambda)$ はそれぞれ λ の η スペクトル、 η の λ スペクトルという。これらのスペクトルのピークの位置は相関係数の値によって変化する。とくに、(16)式で示したように、平均波形勾配が相関係数の関数として与えられたことは重要である。従来の研究によれば、波形勾配は流れのFr数などの関数として知られている。したがって(16)式から相関係数はFr数などの関数として与えられるはずであり、(15)式のスペクトルの相関係数による変形特性はFr数

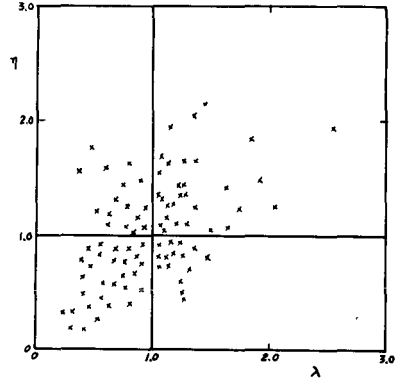


Fig. 5 η と λ の scatter diagram

などの水理量の変化と関係づけられることを示している。参考ではあるが、本研究において行った実験条件($Fr \approx 0.2 \sim 0.3$ なる lower regime, $d_{50} = 0.15 \text{ mm}$)の範囲では η と λ の相関係数は $0.6 \sim 0.9$ の範囲にあり、かなり線形相関は高い。しかし、より higher な regime にうつるにつれて線形相関は低下してくるものと思われる。つぎに、 η の τ スペクトルは $S_{\eta}(\lambda) d\lambda = S_{\eta}(\tau) d\tau$, $P(\lambda) d\lambda = P(\tau) d\tau$ および $\lambda = a\tau^{2/3} = 1.067\tau^{2/3}$ の関係から次式となる。

$$S_{\eta}(\tau) = 1.2 [1 - r + 1.067 r \tau^{2/3}] \tau^{1/3} \cdot \exp(-0.89 \tau^{2/3}) \quad (17)$$

次に、 $S_{\eta}(\lambda)$ の誘導と同様の手法によって η^2 の λ スペクトル, $S_{\eta^2}(\lambda)$ は Fig 5 の scatter diagram において全ての η を 2 乗して $\lambda^{-4/3}$ と $\lambda^{4/3}$ の間にあるものの総和をとり、これを $\Delta\lambda \rightarrow 0$ ならしめた時の極限として定義され、数学的には

$$S_{\eta^2}(\lambda) = \int_0^{\infty} \eta^2 \cdot P(\eta, \lambda) d\eta \quad (18)$$

で表わされる。また、次式のようにもかける。

$$\begin{aligned} S_{\eta^2}(\lambda) &= P(\lambda) \cdot \int_0^{\infty} \eta^2 P(\eta) d\eta \\ &= \overline{\eta^2} \cdot P(\lambda) \end{aligned} \quad (19)$$

したがって、ある λ が現われた時の η^2 の平均： $\overline{\eta^2}$ を評価すれば、 $S_{\eta^2}(\lambda)$ は決定される。そこで、 $\overline{\eta^2} = \bar{\lambda}^2$ と線形回帰性を仮定し、 $\overline{\eta^2} = K_1 (\bar{\lambda})^2$ とおき、(14)式を考慮することによって、 $\overline{\eta^2}$ は

$$\overline{\eta^2} = K_1 [1 - r + r\lambda]^2 \quad (20)$$

となり、若干の条件から K_1 は

$$K_1 = \overline{\eta^2} / [1 + r^2 (\overline{\eta^2} - 1)] \quad (21)$$

となる。したがって、 η^2 の λ スペクトルは

$$S_{\eta^2}(\lambda) = \overline{\eta^2} [1 - r + r\lambda]^2 / (1 + 0.273 r^2) \cdot \lambda \exp(-\pi \lambda^2 / 4) \quad (22)$$

となる。また、 $S_{\eta^2}(\lambda) d\lambda = S_{\eta^2}(\tau) d\tau$, $P(\lambda) d\lambda = P(\tau) d\tau$, $\lambda = a\tau^{2/3}$ の諸関係を考慮すれば、 η^2 の τ スペクトルは

$$S_{\eta^2}(\tau) = \frac{4a^2 [1 - r + ar\tau^{2/3}]^2}{3(1 + 0.273 r^2)} \tau^{1/3} \cdot \exp(-0.89 \tau^{2/3}) \quad (23)$$

となる。 $S_{\eta^2}(\tau)$ の図は Fig. 6 に示す。 $S_{\eta}(\lambda)$ および $S_{\eta}(\tau)$, $S_{\lambda}(\eta)$ については参考文献(1)を参照された。 $S_{\eta}(\lambda)$, $S_{\eta^2}(\tau)$ のスペクトルは各々 $\overline{\eta^2}$ への λ および τ の寄与の割合を表わすものである。したがって、スペクトルのピークを示す λ および τ は、波高の2乗についての最も密度の大きい波長および周期成分を示す。一方 Turkey の手法によって得られる波数スペクトルおよび周期波数スペクトルは、各々河床変動のエネルギー、すなわち分散への波長および周期の寄与を表わすものである。したがって両者は共に変動への波長および周期の寄与を表わすものとして互いに関連をもつと考えられるが、未だ研究不足であり、今後の研究をまつ。なお、最後ではあるが本研究では、 $S_{\eta}(\tau)$, $S_{\eta^2}(\tau)$ を求めるにあたって、 $\lambda = a\tau^{2/3}$ なる関係を用いたが、この関係式は本実験の水理条件の範囲および河床砂($d_{50} = 0.15 \text{ mm}$)に対しては近似的に成立すると思われるが、今後はこの波長と周期の関係および相関係数と水理条件との関連性をもつがまねばならぬ)と考える。

参考文献：(1) Bretschneider, C.L. : Wave variability and wave spectra for wind-generated gravity waves, B.E.B., Tech. Memo., No. 118, august, 1959. , (2) Turkey, J.W. : The sampling theory of power spectrum estimates, (3) 荻田和男・田中裕一郎：砂運に関する実験的研究(3), 京大防災研究所年報, 第10号B, 昭和42, 3.