Stream Function Theory の適用例
——とくに水粒子速度について——

京都大学工学部　正員　岩垣雄一
京都大学工学部　正員　酒井哲郎
千葉県庁　正員　○山田雄三

1\. はじめに　Dean の提案する stream function theory を，非対称な波形を有しかつ同じ波形がくりかえさない合成波や不規則波に適用し，実測の波形 η_m と理論波形 η_p，および実測の水平水粒子速度 u_m と理論水平水粒子速度 u_p とを比較するとともに，Dean の定義した2つの誤差を計算した例を示す。

2\. 解析方法　一定の波速 L/T（L：波長，T：周期）で運動する座標系 x-z で，Laplace の方程式と水平床での条件を満足する流れ関数 ψ を，未知定数 $X(J)$ を使って，

$$\psi=(L/T)z+\sum_{n=4,6,8}^{N-1}\sinh(n-2)\pi(h+z)/L\,\left[X(n)\cos(n-2)\pi x/L+X(n+1)\sin(n-2)\pi x/L\right] \quad\cdots\cdots (1)$$

と表わす。したがって静止座標系から見た水平，鉛直水粒子速度 u，w は，それぞれ

$$u=-\partial\psi/\partial z+(L/T)=-\sum_{n=4,6,8,\cdots}^{N-1}\frac{(n-2)\pi}{L}\cosh(n-2)\pi\frac{h+z}{L}\left[X(n)\cos(n-2)\pi x/L+X(n+1)\sin(n-2)\pi x/L\right]\cdots (2)$$

$$w=\partial\psi/\partial x=-\sum_{n=4,6,8,}^{N-1}\frac{(n-2)\pi}{L}\sinh(n-2)\pi\frac{h+z}{L}\left[X(n)\sin(n-2)\pi x/L-X(n+1)\cos(n-2)\pi x/L\right]\cdots (3)$$

となる。また，流れ関数 ψ が水面で一定値 $\psi(x,\eta)=X(3)$ をとることより，(1)式において $z=\eta$ とおくと，

$$\eta=(T/L)X(3)-(T/L)\sum_{n=4,6,8}^{N-1}\sinh(n-2)\pi(h+\eta)/L\cdot\left[X(n)\cos(n-2)\pi x/L+X(n+1)\sin(n-2)\pi x/L\right]\cdots (4)$$

となる。この式で求められる η を η_p とする。水面での力学的条件は，水面での圧力を0として，

$$\eta+\left[(u-L/T)^2+w^2\right]/2g=Q \quad\cdots\cdots (5)$$

となる。ここに Q は Bernoulli 定数である。つぎに $X(J)$ を定める計算手順を述べる。そのために次の誤差 E_1，E_2 および E_T を定義する。

$$E_1=\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}(Q_i-\bar{Q})^2,\quad E_2=\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}(\eta_{mi}-\eta_{pi})^2,\quad E_T=E_1+\lambda\cdot E_2$$

ここに I は1波長（または1周期）を分割した総数，$\bar{Q}=\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}Q_i$，$\lambda$ は相対的な重さをあらわす。ただし，$X(2)=T$ の初期値は波形から読みとり，$X(1)=L$ のそれは微小振幅波理論の関係を用いてあたえる。まず E_2 が最小になるように，$\partial E_2/\partial X(J)=0$ $(J=3,4,\cdots,N)$ より $X(3)\sim X(N)$ の初期値をきめる。つぎに，未知数 $X(1)\sim X(N)$ の初期値を，(5)式をも満たすように $X'(J)$ だけ変化させる。そのとき E_T は

$$E_T=\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\left[\left(Q_i+\sum_{n=1}^{N}\frac{\delta Q_i}{\delta X(n)}X'(n)\right)-\left(\bar{Q}+\sum_{n=1}^{N}\frac{\delta\bar{Q}}{\delta X(n)}X'(n)\right)\right]^2+\lambda\cdot\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\left[\left(\eta_{pi}+\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial\eta_{pi}}{\partial X(n)}X'(n)\right)-\eta_{mi}\right]^2\cdots\cdots (6)$$

となる。ここに，$\frac{\delta Q}{\delta X(J)}=\frac{\partial Q}{\partial X(J)}+\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial X(J)}+\frac{\partial Q}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial X(J)}$ であり，$\frac{\partial\eta_p}{\partial X(J)}$ において，$\eta_p^{(j)}=(T/L)X(3)-(T/L)\sum_{n=4,6,8}^{N-1}\sinh(n-2)\pi(h+\eta_p^{(j-1)})/X(1)\left[X(n)\cos(n-2)\pi x/L+X(n+1)\sin(n-2)\pi x/L\right]$ である。この E_T を最小にするための式 $\partial E_T/\partial X'(J)=0$ は $X'(J)$ についての連立方程式になる。それは次のようである。

$$\sum_{n=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{I}\left\{\left(\frac{\delta Q_i}{\delta X(n)}-\frac{\delta\bar{Q}}{\delta X(n)}\right)\cdot\left(\frac{\delta Q_i}{\delta X(J)}-\frac{\delta\bar{Q}}{\delta X(J)}\right)+\lambda\frac{\partial\eta_{pi}}{\partial X(n)}\cdot\frac{\partial\eta_{pi}}{\partial X(J)}\right\}\right]\cdot X'(n)$$
$$=-\sum_{i=1}^{I}\left\{(Q_i-\bar{Q})\left(\frac{\delta Q_i}{\delta X(J)}-\frac{\delta\bar{Q}}{\delta X(J)}\right)+\lambda(\eta_{pi}-\eta_{mi})\frac{\partial\eta_{pi}}{\partial X(J)}\right\},\quad (J=1,2,3,\cdots N)\quad\cdots\cdots (7)$$

この連立方程式を解いて，$X'(J)$ が十分小さくなければ，$X(J)+X'(J)$ を新たに $X(J)$ として(6),

(7)式で再び同じ計算をする。このようにくりかえして $X(J)$ が十分小さくなれば，そのときの $X(J)$ の値を使って，(2)，(3)および(4)式より，u_p，w_p，η_p が求まる。

<u>3. 適用例</u>　図1はやや非対称な波形を有する合成波，図2は非対称な波形を有する不規則波の一波への適用例である。$N=13$，$\lambda=1.0$，$h=45$ cm であり，u_p は $z=-9.0$ cm での値である。またDeanの定義した水面での運動学的および力学的境界条件の満足度を示す2つの量は，$\delta_{Di} \equiv Q_i - \bar{Q}$，　$\delta_{Ki} \equiv \eta_{mi} - \eta_{pi}$　である。

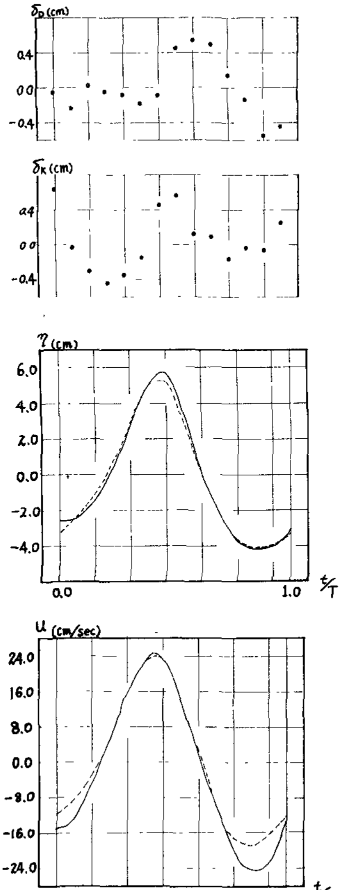

図1　δ_{Di} と δ_{Ki} および η_{pi} と η_{mi}，u_{pi} と u_{mi} との比較

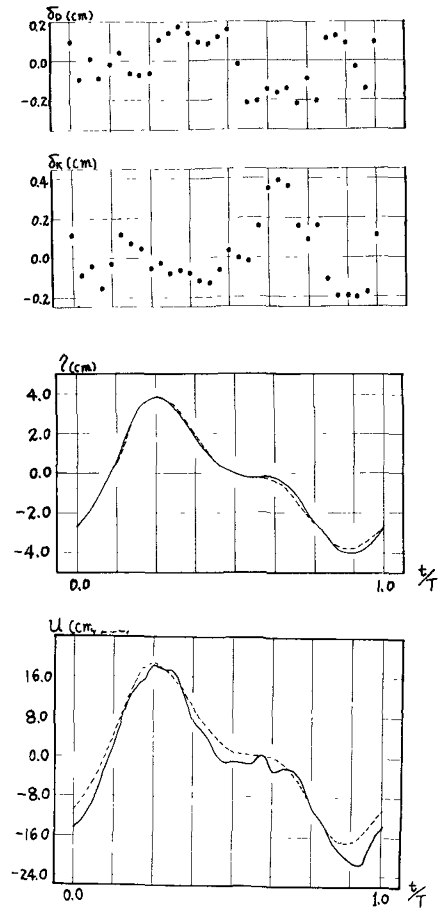

図2　δ_{Di} と δ_{Ki} および η_{pi} と η_{mi}，u_{pi} と u_{mi} との比較

I= 14

初期波長	159.7 (cm)
初期周期	1.04 (sec)
最終波長	172.0 (cm)
最終周期	1.07 (sec)

I= 32

初期波長	499.5 (cm)
初期周期	2.48 (sec)
最終波長	510.0 (cm)
最終周期	2.59 (sec)